



## Frequency Analysis and Rainfall-Runoff Simulation Based on the Tree Sequence of Vine Copula

Mohammad Nazeri Tahroudi<sup>1</sup> | Rasoul Mirabbasi Najafabadi<sup>2\*</sup>

1. Department of Water Engineering, Shahrekord University, Shahrekord, Iran. E-mail: [m\\_nazeri2007@birjand.ac.ir](mailto:m_nazeri2007@birjand.ac.ir)
2. Corresponding Author, Department of Water Engineering, Shahrekord University, Shahrekord, Iran. E-mail: [mirabbasi@sku.ac.ir](mailto:mirabbasi@sku.ac.ir)

### Article Info

#### Article type:

Research Article

#### Article history:

Received: November 01, 2022

Received in revised form:

November 17, 2022

Accepted: January 23, 2023

Published online: April 14, 2023

#### Keywords:

Canonical Structure,

Conditional Density,

Four-Dimensional copula,

Tree Structure,

Zayandeh-Rood.

### ABSTRACT

Rainfall-runoff simulation is one of the most important challenges in the management of water resources in each basin, considering the climatic changes and the increase of extreme values in recent years, especially in different regions of Iran. In this study, the rainfall and runoff values in the statistical period of 1993-2019 were used regarding the rainfall-runoff simulation in the Qale Shahrokh sub-basin in the Zayandeh-Rood Dam basin. In this study, the Vine copula-based simulation approach was used to simulate and joint frequency analysis the flow discharge in Qale Shahrokh station given by the rainfall in Chelgerd, Meyheh and Marghmalek stations. By analyzing the tree sequence of vine copulas and using internal rotated copulas, D-vine copula was selected as the best copula based on the studied statistics. By using the best copula and the conditional relationship  $c(u_4|u_1, u_2, u_3)$ , the flow discharge simulation was done given by rainfall of the upstream stations. The simulation results showed an error rate equal to 18.57 (m<sup>3</sup>/s) based on the RMSE statistic and the efficiency of the model was 0.86 based on the NSE statistic. The results of the simulation of flow discharge values given by rainfall in the upstream stations showed that the proposed approach has simulated the average of observed values with high accuracy. By considering the condition of rainfall occurrence in the frequency analysis of flow discharge in Qale Shahrokh station, the joint return period curve and the conditional probability of occurrence in this sub-basin were obtained. Using this curve, it is possible to estimate the flow discharge values of the studied station with high accuracy along with different return periods and different probability of occurrence. Considering the fact that the proposed method is based on the condition of rainfall in the region as well as the marginal distribution according to the data, it has no implementation limitations and is somehow specific to the studied region.

**Cite this article:** Nazeri Tahroudi, M., & Mirabbasi Najafabadi, R. (2023). Frequency Analysis and Rainfall-Runoff Simulation Based on the Tree Sequence of Vine Copula. *Journal of Water and Irrigation Management*, 13 (1), 259-274. DOI: <https://doi.org/10.22059/jwim.2023.350666.1027>





## تحلیل فراوانی و شبیه‌سازی بارش - رواناب مبتنی بر توالی درختی مفصل و این

محمد ناظری تهرودی<sup>۱</sup> | رسول میرعباسی نجف‌آبادی<sup>۲</sup>

۱. گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران. رایانامه: [m\\_nazeri2007@birjand.ac.ir](mailto:m_nazeri2007@birjand.ac.ir)  
۲. نویسنده مسئول، گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران. رایانامه: [mirabbasi@sku.ac.ir](mailto:mirabbasi@sku.ac.ir)

### اطلاعات مقاله

### چکیده

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۸/۱۰

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۰۹/۲۶

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۱/۰۳

تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۰۱/۲۵

### کلیدواژه‌ها:

چگالی شرطی،

زاینده‌رود،

ساختار درختی،

ساختار متعارف،

مفصل چهار بعدی.

شبیه‌سازی بارش - رواناب با توجه به تغییرات اقلیمی و افزایش مقادیر حدی در سال‌های اخیر به‌ویژه در نواحی مختلف ایران یکی از چالش‌های مهم در مدیریت منابع آب در هر حوضه است. در این مطالعه، برای شبیه‌سازی بارش - رواناب در زیرحوضه قلعه شاهرخ در حوضه آبریز سد زاینده‌رود از مقادیر بارش و دبی جریان در دوره آماری ۱۳۷۲-۱۳۹۸ استفاده شد. بدین منظور، از رویکرد شبیه‌سازی مبتنی بر مفصل و این برای شبیه‌سازی و تحلیل فراوانی هم‌زمان دبی جریان در ایستگاه قلعه شاهرخ به شرط وقوع بارش در ایستگاه‌های چلگرد، میهه و مرغملک استفاده شد. با تحلیل توالی درختی مفصل‌های و این و استفاده از مفصل‌های دورانی داخلی، مفصل D-vine براساس آماره‌های موردبررسی به‌عنوان مفصل برتر انتخاب شد. با به‌کارگیری مفصل برتر و رابطه شرطی  $c(u_4|u_1, u_2, u_3)$  شبیه‌سازی مقادیر دبی جریان به شرط وقوع بارش در ایستگاه‌های بالادست انجام شد. نتایج شبیه‌سازی میزان خطایی برابر با  $۱۸/۵۷$  مترمکعب بر ثانیه براساس آماره RMSE و کارایی مدل  $۰/۸۶$  را براساس آماره NSE نشان داد. نتایج شبیه‌سازی مقادیر دبی جریان به شرط وقوع بارش در ایستگاه‌های بالادست، نشان داد که رویکرد پیشنهادی متوسط مقادیر مشاهداتی را با دقت بالا شبیه‌سازی کرده است. با در نظر گرفتن شرط وقوع بارش در تحلیل فراوانی وقوع دبی جریان در ایستگاه قلعه شاهرخ، منحنی دوره بازگشت هم‌زمان و احتمال وقوع شرطی در این زیرحوضه حاصل شد. با استفاده از این منحنی می‌توان مقادیر دبی جریان ایستگاه مورد مطالعه را با دقت بالا همراه با دوره بازگشت‌های مختلف و احتمال وقوع مختلف برآورد کرد. روش پیشنهادی با توجه به این که براساس شرط وقوع بارش در منطقه و هم‌چنین توزیع حاشیه‌ای متناسب با داده‌ها ارائه شده است، هیچ محدودیتی نداشته و به‌عبارت دیگر مختص منطقه مورد مطالعه است.

استناد: ناظری تهرودی، م. و میرعباسی نجف‌آبادی، ر (۱۴۰۲). تحلیل فراوانی و شبیه‌سازی بارش - رواناب مبتنی بر توالی درختی مفصل و این. نشریه مدیریت آب و آبیاری، ۱۳ (۱)، ۲۷۴-۲۵۹. DOI: <https://doi.org/10.22059/jwim.2023.350666.1027>



## ۱. مقدمه

در سال‌های اخیر با افزایش وقوع بارش‌های حدی، خطر سیل و خشک‌سالی بیش‌تر نقاط جهان به‌ویژه ایران را تهدید می‌کند. پیش‌بینی و برآورد مقادیر این دو پدیده با دقت قابل‌قبولی برای کاهش خسارت‌های خشک‌سالی و سیل و همچنین طراحی بهینه سازه‌های آبی ضروری است. در این راستا بسته به داده‌ها و شرایط موجود، روش‌های مختلفی به‌کار گرفته شده است که هر کدام نقاط قوت و ضعف خاص خود را دارند. از آنجاکه پدیده‌های هیدرولوژیک معمولاً با دو یا چند متغیر وابسته توصیف می‌شوند، تحلیل آماری چندمتغیره و هم‌چنین تحلیل وابستگی بین متغیرها برای افزایش دقت پیش‌بینی‌ها ضروری است. مهم‌ترین مسئله تحلیل چندمتغیره احتمالاتی، ایجاد ساختار وابستگی برای متغیرهای تصادفی مرتبط است. توابع توزیع چندمتغیره به‌طور گسترده‌ای برای مدل‌سازی دو یا چند متغیر وابسته هیدرولوژیک و ساختار وابستگی آن‌ها استفاده شده است (Salvadori and De Michele, 2007). در سال‌های گذشته، برخی از روش‌های چندمتغیره در برنامه‌های کاربردی هیدرولوژیک و محیط زیست معرفی شده‌اند. توابع توزیع تجمعی (CDF) که به‌طور گسترده استفاده می‌شود، گاوسی است. اما این محدودیت را دارد که توزیع‌های حاشیه‌ای باید نرمال باشند. سپس توزیع دو متغیره با توزیع حاشیه‌ای غیر نرمال پیشنهاد شد. مانند توزیع دو متغیره نمایی (Favre *et al.*, 2002)، توزیع دو متغیره گاما (Yue *et al.*, 2001) و توزیع دو متغیره مقادیر حدی (Adamson *et al.*, 1999). Favre *et al.* (2004) به‌طور خلاصه اشکالات این نوع توزیع‌ها را بیان کردند ۱- توزیع حاشیه‌ای باید از یک خانواده باشد، ۲- برای حالت بیش از دو متغیر، واضح و قابل بیان نیست و ۳- پارامترهای توزیع حاشیه‌ای برای مدل وابستگی<sup>۱</sup> بین متغیرهای تصادفی نیز استفاده می‌شود. برای غلبه بر این کاستی‌ها، توابع مفصل که جدیدترین ابزار ریاضی برای تجزیه و تحلیل پدیده‌های چندمتغیره هستند، در تحلیل هیدرولوژیکی مورد استفاده قرار گرفت (Xiao *et al.*, 2008).

Favre *et al.* (2004) برای توصیف وابستگی بین دبی پیک سیلاب و حجم سیلاب از مفصل‌های دو متغیره استفاده کردند. Zhang and Singh (2006) برای توزیع دو بعدی دبی پیک سیلاب و حجم سیلاب، دبی پیک سیلاب و مدت دوام آن و حجم سیلاب و مدت دوام آن، از توابع مفصل ارشمیدسی<sup>۲</sup> استفاده کردند. Salvadori and De Michele (2007) برخی از مدل‌سازی‌های هیدرولوژیک را ارائه کردند که از توابع مفصل استفاده شده بود. مانند محاسبه احتمالات شرطی و دوره‌های بازگشت دو رویداد مختلف. Kao and Govindaraju (2008) یک تابع غیر ارشمیدسی<sup>۳</sup> از خانواده توزیع پلاکت<sup>۴</sup> را مورد بررسی قرار دادند و از آن برای توزیع زمانی بارش‌های حدی استفاده نمودند. Pham *et al.* (2018) از توابع و این برای ایجاد یک مدل مفهومی هیدرولوژیک بین بارش، سری‌های زمانی تبخیر و تعرق و مقادیر دبی استفاده کردند. نتایج نشان داد که اگرچه این مدل عدم قطعیت مدل‌سازی را افزایش می‌دهد، اما می‌توان نتیجه گرفت که استفاده از مدل تصادفی بارش - تبخیر و تعرق، پتانسیل بالایی برای تحلیل فراوانی هیدرولوژیک دارد. Zhang *et al.* (2018) پتانسیل روش مبتنی بر مفصل را برای توزیع احتمال سه‌بعدی که عرضه و تقاضای آب برای منطقه آبیاری Luhon در چین را توصیف می‌کند، بررسی کرده و عملکرد روش مبتنی بر مفصل را رضایت بخش عنوان کردند. Wang *et al.* (2019) از شاخص SPI و مقادیر بارش روزانه ۱۶ ایستگاه طی سال‌های ۲۰۱۱-۱۹۶۱ برای مطالعه مشخصه‌های خشک‌سالی هواشناسی (شدت و مدت) در استان آنهویی چین استفاده کردند. با انتخاب بهترین توزیع حاشیه‌ای و بهترین جفت دو متغیره، دوره بازگشت از نظر مدت زمان خشک‌سالی و شدت آن برآورد شد. نتایج نشان داد که متوسط و شدیدترین خشک‌سالی در مناطق شمال و جنوب غربی استان مورد مطالعه و کم‌ترین آن در نواحی شمال و جنوب شرق رخ داده است. Nazerui Tahroudi *et al.* (2021) جهت روندیابی سیلاب در چندین رودخانه کارایی مدل شبیه‌سازی مبتنی بر مفصل را ارزیابی کردند. آن‌ها با استفاده از توابع مفصل دو بعدی و چگالی شرطی اقدام به

شبیه‌سازی هیدروگراف خروجی سیلاب کرده و اذعان داشتند روش پیشنهادی از دقت بالایی نسبت به مطالعات انجام‌شده در این زمینه برخوردار می‌باشد. Dastourani and Nazeri Tharoudi (2022) با استفاده از توابع مفصل به شبیه‌سازی پمپاژ آب زیرزمینی و زمان پمپاژ در دبی ثابت پرداختند. برای تخمین افت آب زیرزمینی در زمان‌های پمپاژ مختلف با احتمالات مختلف، منحنی‌های تیپ به‌دست آمد. آن‌ها بیان کردند که استفاده از تئوری مفصل نتایج شبیه‌سازی قابل اطمینانی ارائه کرده است. Khashei-Siuki *et al.* (2022) جهت شبیه‌سازی دو متغیره تبخیر و تعرق گیاه مرجع در ایستگاه‌های هواشناسی در کویر لوت (بم، بیرجند و طبس) در بازه زمانی ۱۳۶۳ تا ۱۳۹۸ با در نظر گرفتن سرعت باد متناظر به‌صورت ماهانه، از توابع مفصل و چگالی شرطی آن‌ها استفاده کردند. با انتخاب بهترین توزیع حاشیه‌ای و بهترین مفصل، تحلیل فراوانی، دوره بازگشت هم‌زمان و شبیه‌سازی مبتنی بر مفصل را ارائه کردند که منجر به ارائه منحنی‌های تیپ در خصوص شبیه‌سازی دومتغیره شد. Khozaymehnezhad and Nazeri-Tahroudi (2020) نیز جهت تحلیل فراوانی هم‌زمان سری‌های نایستا در بالادست برخی از سدهای احداث‌شده در حوضه دریاچه ارومیه از توابع مفصل استفاده کردند. آن‌ها با تلفیق روش مبتنی بر مفصل و شاخص مخزن اصلاح‌شده روشی را در خصوص حذف نایستایی از سری‌های نایستا ارائه کردند. Tabatabaei *et al.* (2022) با استفاده از توابع مفصل و شبیه‌سازی مبتنی بر آن اقدام به توسعه روش آنروپی در بهینه‌یابی شبکه پایش کردند. آن‌ها با استفاده از تابع مفصل تأثیر متقابل ایستگاه‌ها در تئوری آنروپی را توسعه داده و روشی موسوم به بهینه‌یابی شبکه پایش مبتنی بر آنروپی ارائه کردند.

Pronoos Sedighi *et al.* (2022) نیز در پژوهش‌های خود به بررسی دقت مدل شبیه‌سازی مبتنی بر مفصل دومتغیره در شبیه‌سازی دبی جریان - دبی رسوب در حوضه رودخانه زهره پرداختند. نتایج پژوهش آن‌ها دقت، کارایی و قطعیت مدل شبیه‌سازی مبتنی بر مفصل را تأیید کرد. Nazeri Tahroudi *et al.* (2022) از روشی مبتنی بر چگالی شرطی مفصل‌های واین برای پایش خشک‌سالی و پیش‌بینی مقادیر کمبود بارندگی در حوضه دریاچه ارومیه استفاده کردند. کمبود بارندگی سالانه و کمبود بارندگی در دوره‌های ۱۰، ۳۰ و ۶۰ روزه به‌عنوان متغیر در نظر گرفته شد. آن‌ها بیان کردند که اگر میزان بارندگی کم‌تر از میانگین بلندمدت در منطقه باشد، کمبود بارندگی برای آینده نزدیک را می‌توان با دقت قابل‌قبولی تخمین زد. هم‌چنین، نتایج تحلیل احتمال شرطی نشان داد که به‌طور متوسط احتمال وقوع کمبود بارندگی ۲۵۰ میلی‌متر در مقایسه با میانگین بلندمدت در منطقه مورد مطالعه بیش از ۵۰ درصد در سال است.

با توجه به پژوهش‌های مختلف، طی سال‌های اخیر بارش‌های مناطق مختلف ایران دچار تغییرات شدیدی در زمینه پراکندگی و الگوی بارش شده است. این تغییرات باعث ایجاد بارش‌های حدی در مناطق مختلف ایران شده است که مقادیر دبی را نیز تحت تأثیر قرار داده است. پیش‌بینی مقادیر دبی جریان تحت تأثیر بارش‌های بالادست در هر حوضه می‌تواند به‌عنوان سیستم هشدار در آینده‌ای نزدیک باشد. برای نیل این امر نیاز به ارائه مدلی چندمتغیره است که شرط وقوع بارش را در نظر بگیرد. از طرفی مدل‌های پیش‌بینی که در حال حاضر به‌طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند، معمولاً قطعی هستند و خروجی‌های مدل به‌صورت مقادیر تعیین‌کننده به‌کاربران ارائه می‌شود. با این حال، یک مدل پیش‌بینی هیدرولوژیک، تنها برای شبیه‌سازی فرایندهای هیدرولوژیک واقعی بوده و بنابراین ناقص بوده و دقیق نیست. بر این اساس هدف از مطالعه حاضر، ارائه روشی مبتنی بر مفصل‌های واین جهت شبیه‌سازی مقادیر دبی جریان به شرط وقوع بارش در ایستگاه‌های باران‌سنجی بالادست حوضه می‌باشد. در این راستا، ضمن بررسی ساختار درختی مفصل‌های خانواده واین به شبیه‌سازی و تحلیل فراوانی هم‌زمان دبی جریان ایستگاه قلعه شاهرخ به شرط وقوع بارش در ایستگاه‌های باران‌سنج بالادست آن (میبهه، چلگرد و مرغملک) در زیرحوضه قلعه شاهرخ در حوضه سد زاینده‌رود در دوره آماری ۱۳۷۲-۱۳۹۸ پرداخته شد.

## ۲. مواد و روش‌ها

در این مطالعه، از داده‌های دبی جریان (مترمکعب بر ثانیه) و بارش (میلی‌متر) متناظر با آن در مقیاس روزانه در دوره آماری ۱۳۷۲-۱۳۹۸ در زیرحوضه قلعه شاهرخ واقع در بالادست حوضه آبریز سد زاینده‌رود استفاده شد. برای مقادیر دبی جریان از مقادیر ایستگاه قلعه شاهرخ واقع در خروجی زیرحوضه مورد مطالعه استفاده شد. از داده‌های بارش ایستگاه‌های باران‌سنجی مرغملک، میبه و چلگرد نیز استفاده شد. سد زاینده‌رود، بر روی رودخانه زاینده‌رود احداث شده است. زیرحوضه قلعه شاهرخ نیز با مساحتی برابر با ۱۳۹۷ کیلومتر مربع در جنوب‌غربی سد زاینده‌رود واقع شده است. شکل (۱) موقعیت سد زاینده‌رود و ایستگاه‌های باران‌سنجی و هیدرومتری موجود را نشان می‌دهد.

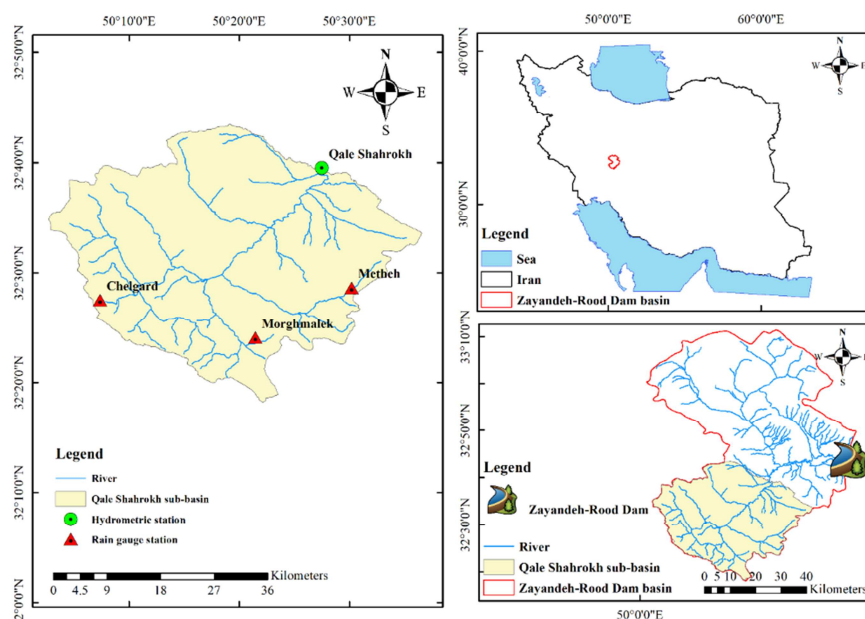


Figure 1. The location of rain gauge and hydrometric stations in Qale Shahrokh sub-basin

## ۲.۱. توابع مفصل

توابع مفصل ابتدا توسط Sklar (1959) معرفی شدند. مفصل‌ها توابعی هستند که با ترکیب توابع توزیع حاشیه‌ای یک بعدی، تابع توزیع چندمتغیره را ایجاد می‌کنند (Nelsen, 2006). تابع مفصل قادر است ساختار وابستگی بین دو یا چند متغیر تصادفی را نشان دهد و به‌تازگی به‌عنوان یک روش عملی و کارآمد برای مدل‌سازی وابستگی پدیده‌های چندمتغیره ظاهر شده است. با الهام از پژوهش‌های Joe (1997) و Kurowicka and Cooke (2007) می‌توان مشاهده کرد که چگونه می‌توان داده‌های چندمتغیره را با استفاده از بلوک‌های ساختاری ساده<sup>۵</sup> به نام جفت-مفصل، مدل‌سازی کرد. بردار  $X = (X_1, \dots, X_n)$  از متغیرهای تصادفی با تابع چگالی هم‌زمان  $f(x_1, \dots, x_n)$  را در نظر بگیرید. این چگالی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_n(x_n) : f(x_{n-1} | x_n) : f(x_{n-2} | x_{n-1}, x_n) \dots f(x_1 | x_2, \dots, x_n) \quad (۱)$$

و این تجزیه تا رسیدن به بازتولید متغیرها، یکتاست. هر عملکرد توزیع هم‌زمان به‌طور ضمنی شامل رفتار حاشیه‌ای متغیرهای تکی و ساختار وابستگی آن‌ها است. مفصل راهی برای جداسازی ساختار وابستگی آن‌ها ارائه می‌دهد. یک مفصل، توزیع چندمتغیره  $C$  با حاشیه‌های توزیع یکنواخت  $U(0,1)$  در  $[0,1]$  است. تئوری اسکالر بیان می‌کند که هر توزیع چندمتغیره  $F$  با حاشیه‌های  $F_1(x_1), \dots, F_2(x_2)$  می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود (Nazeri Tahroudi et al., 2022c):

$$f(x_1, \dots, x_n) = C\{F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)\} \quad \text{رابطه ۲}$$

برای برخی مفصل‌های C چند بعدی (n بعدی)، در حقیقت رابطه فوق به شرح زیر اصلاح می‌شود:

$$C(u_1, \dots, u_n) = F\{F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)\} \quad \text{رابطه ۳}$$

که در آن،  $F_n^{-1}(u_n)$  معکوس توابع توزیع حاشیه‌ای هستند. با توجه به تابع چگالی هم‌زمان f، برای مقادیر F پیوسته افزایشی، چگالی‌های حاشیه‌ای پیوسته  $F_1, \dots, F_2$  با استفاده از قانون زنجیره‌ای<sup>۶</sup> به شرح زیر برای برخی از چگالی‌های مفصل n متغیره  $C_{1\dots n}(\cdot)$  برآورد می‌شود:

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_{1\dots n}\{F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)\} : f_1(x_1) \dots f_n(x_n) \quad \text{رابطه ۴}$$

در مفصل‌های چندبعدی مرسوم، نیاز است که همه سری‌ها، وابستگی یکسانی داشته باشند. به‌عنوان مثال، یک مفصل چهاربعدی به معنای وابستگی بین هر دو سری جفت مفصل است که در واقعیت به‌ندرت اتفاق می‌افتد. هنگامی که ابعاد به پنج و بیش‌تر می‌رسد، دقت در روش‌های سنتی مفصل به میزان قابل‌توجهی کاهش می‌یابد (Nazeri Tahroudi et al., 2022d). مفصل‌های واین، انواع مختلف وابستگی را در جفت‌های مختلف امکان‌پذیر می‌کنند و هم‌چنین به‌راحتی با ابعاد بالاتر به‌عنوان مثال تا ۱۰ بعد را مدل می‌کنند. در حالی که یک مفصل واین d بعدی توسط  $d(d-1)$  مفصل دوتایی به شکل درختی ساخته می‌شوند. نقطه شروع برای ساخت توزیع چندمتغیره، شناخت کامل تابع چگالی چندمتغیره آن و تبدیل آن به چندین چگالی شرطی است. دو مشخصه ویژه درخت واین توسط Bedford and Cooke (2001) شناسایی شدند. یکی از آن‌ها درختان واین انعطاف‌پذیر<sup>۷</sup> (D-vine) و دیگری درختان واین متعارف<sup>۸</sup> (C-vine) نامیده می‌شوند. مفصل R-vine نسبت به نوع C یا D، به دلیل این‌که اجازه می‌دهد طیف‌های گسترده‌تری از توالی‌ها فراهم شود، انعطاف‌پذیری بیش‌تری دارد. به‌منظور افزایش تنوع توالی، مفصل R-vine مفهومی جدید را ارائه می‌دهد. به‌طور کلی یک درخت واین منظم یا R-vine یک مفصل: D-vine است، اگر هر گره در درخت T-1، حداکثر دو لبه داشته باشد.

C-vine است، اگر هر درخت در  $T_i$  یک گره ویژه با d-1 لبه داشته باشد. گره با d-1 لبه در درخت  $T_i$  ریشه نامیده می‌شود. برای توزیع ابعاد بالاتر، تعداد قابل‌توجهی از توالی جفت مفصل ممکن، وجود دارد. به‌عنوان مثال ۲۴۰ توالی مختلف برای حالت پنج‌بعدی وجود دارد (Aas et al., 2009). برای کمک به سازماندهی آن‌ها، یک مدل گرافیکی معرفی شد که به آن واین منظم گفته می‌شود. کلاس مفصل‌های واین منظم بسیار گسترده است و تعداد زیادی از تجزیه‌های ممکن جفت مفصل را در بر می‌گیرد. هر مدل روش خاصی برای تجزیه چگالی ارائه می‌دهد. واین‌های C و D نیز زیرمجموعه‌ای از واین منظم می‌باشند. مشخصات آن‌ها ممکن است به شکل مثلاً مجموعه‌ای از درختان تو در تو<sup>۹</sup> باشد. شکل (۲) مشخصات مربوط به یک واین پنج‌بعدی را نشان می‌دهد که از چهار درخت  $T_j$ ،  $j=1, \dots, 4$  تشکیل شده است. درخت  $T_j$  دارای 6- ز گره و 5- ز لبه است. در هر لبه برجسب لبه متعلق به نمونه چگالی جفت مفصل است. به‌عنوان مثال، لبه 14|23 متعلق به چگالی مفصل  $C_{14|23}(\cdot)$  است. تمام تجزیه و تحلیل‌ها توسط  $n(n-1)/2$  لبه و چگالی حاشیه‌ای هر متغیر تعریف شده است. گره درخت  $T_j$  فقط برای تعیین برجسب‌های لبه‌ها در درخت  $T_{j+1}$  ضروری است. همان‌طور که از شکل (۲) مشاهده می‌شود، دو لبه در  $T_j$  (که در  $T_{j+1}$  به گره تبدیل می‌شوند) تنها در صورتی که این لبه‌ها در  $T_j$  دارای یک گره مشترک باشند، به‌صورت یک لبه در  $T_{j+1}$  می‌شوند. توجه داشته باشید که توالی درختی برای اعمال روش جفت مفصل کاملاً ضروری نیست، اما به شناسایی تجزیه‌های مختلف جفت مفصل کمک می‌کند.

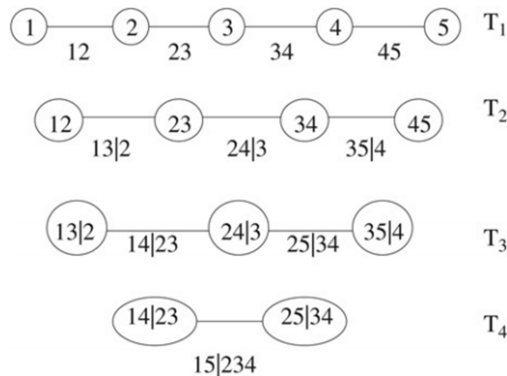


Figure 2. A D-vine with five variables, four trees and ten edges. Each edge may be associated with a pair copula (Aas *et al.*, 2009).

Bedford and Cooke (2001) چگالی یک توزیع  $n$  بعدی از مفصل‌های منظم را برای مفصل D-vine و C-vine

اختصاص دادند. چگالی  $f(x_1, \dots, x_n)$  مربوط به مفصل D-vine به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\prod_{k=1}^n f(x_k) \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-j} c_{i, i+j | i+1, \dots, i+j-1} \{F(x_i | x_{i+1}, \dots, x_{i+j-1}), F(x_{i+j} | x_{i+1}, \dots, x_{i+j-1})\} \quad \text{(رابطه ۵)}$$

که در آن،  $z$  معرف درخت‌هاست که  $i$  حول لبه‌های هر درخت، اجرا می‌شود. در مفصل D-vine، هیچ گره‌ای در هیچ یک از درخت‌های  $T_j$ ، به بیش از دو لبه متصل نمی‌شود. در یک مفصل و این منظم، هر درخت  $T_j$  دارای یک گره منحصر به فرد است که به  $z - j$  لبه متصل است. شکل (۳) یک مفصل C-vine با پنج متغیر را نشان می‌دهد. چگالی  $n$  بعدی که مربوط به یک مفصل C-vine است به شرح زیر می‌باشد:

$$\prod_{k=1}^n f(x_k) \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-j} c_{i, j+i | 1, \dots, j-1} \{F(x_j | x_1, \dots, x_{j-1}), F(x_{j+i} | x_1, \dots, x_{j-1})\} \quad \text{(رابطه ۶)}$$

استفاده از مفصل C-vine ممکن است زمانی مفید باشد که یک متغیر خاص، متغیر کلیدی باشد که بر تعامل در مجموعه داده‌ها حاکم است. در چنین شرایطی ممکن است تصمیم گرفته شود که این متغیر در ریشه مفصل C-vine قرار گیرد (همان‌طور که در شکل (۳) با متغیر ۱ انجام شده است).

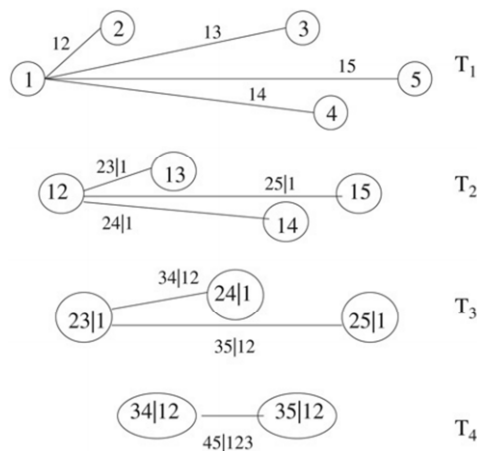


Figure 3. A C-vine copula with 5 variables, 4 trees and 10 edges (Aas *et al.*, 2009)

## ۲.۲. شرایط چگالی شرطی در حالت چهار بعدی

در مرحله بعدی پس از انتخاب تابع و این و ساختار آن، از تابع چگالی شرطی برای تخمین و ارزیابی مقادیر دبی جریان با توجه به مقادیر بارش در ایستگاه‌های بالادست استفاده شد. چگالی شرطی را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$c(u_4 | u_1, u_2, u_3) = \frac{\partial^4 C(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial u_1 \partial u_2 \partial u_3 \partial u_4} \Big|_{u_1, u_2, u_3} \quad \text{رابطه (۷)}$$

که در آن  $u_1, u_2$  و  $u_3$  به ترتیب مقادیر بارش در ایستگاه‌های  $u_1, u_2, u_3$  و  $u_4$  نیز دبی جریان ایستگاه قلعه شاهرخ می‌باشند. برای به دست آوردن نمونه  $u_1$  از  $d$  جفت متغیر مراحل زیر انجام می‌شود:

$$\text{First : Sample } w_j \stackrel{i.i.d.}{\square} U[0;1], j = 1, \dots, d \quad \text{رابطه (۸)}$$

$$\text{Then : } u_1 := w_1$$

$$u_2 := C_{2|1}^{-1}(w_2 | u_1)$$

⋮

$$u_d := C_{d|d-1, \dots, 1}^{-1}(w_d | u_{d-1}, \dots, u_1)$$

برای تعیین توابع توزیع شرطی  $C_{j|j-1, \dots, 1}, j = 1, \dots, d$  ساختارهای جفت مفصل نیاز است. این یک عبارت تکراری با استفاده از توابع  $h$  برای تابع توزیع شرطی مورد نظر ارائه می‌دهد که به راحتی می‌تواند به صورت بازگشتی معکوس شود (Nazeri Tahroudi et al., 2022b). برای اطلاعات بیشتر، (Czado (2019) را ببینید.

## ۳.۲. معیارهای ارزیابی

جزر میانگین مربعات خطا (RMSE)، ضریب کارایی نش- ساتکلیف (NSE)، معیار اطلاعات (AIC) و معیار اطلاعات بیزین (BIC) آماره‌های رایج هستند که برای انتخاب بهترین مفصل و مقایسه نتایج شبیه‌سازی استفاده می‌شوند (Nash and Sutcliffe, 1970; Zhang and Singh, 2006).

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (p_i - \bar{p}_i)^2} \quad \text{رابطه (۹)}$$

$$AIC = 2m - 2 \ln(L) \quad \text{رابطه (۱۰)}$$

$$BIC = N \ln \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (p_i - \bar{p}_i)^2 \right) + m \ln(N) \quad \text{رابطه (۱۱)}$$

$$NSE = 1 - \left( \frac{\sum_{i=1}^N (p_i - \bar{p}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (p_i - p_{ave})^2} \right) \quad \text{رابطه (۱۲)}$$

که در آن،  $\bar{p}_i$  و  $p_i$  به ترتیب برابر با مقادیر شبیه‌سازی شده و مقادیر مشاهداتی می‌باشند.  $N$  تعداد داده‌ها،  $m$  تعداد پارامترها و  $L$  حداکثر مقدار تابع احتمال برای مدل است.  $p_{ave}$  نیز برابر با متوسط مقادیر مشاهداتی می‌باشد. مراحل انجام پژوهش به صورت خلاصه به شرح شکل (۴) می‌باشد.



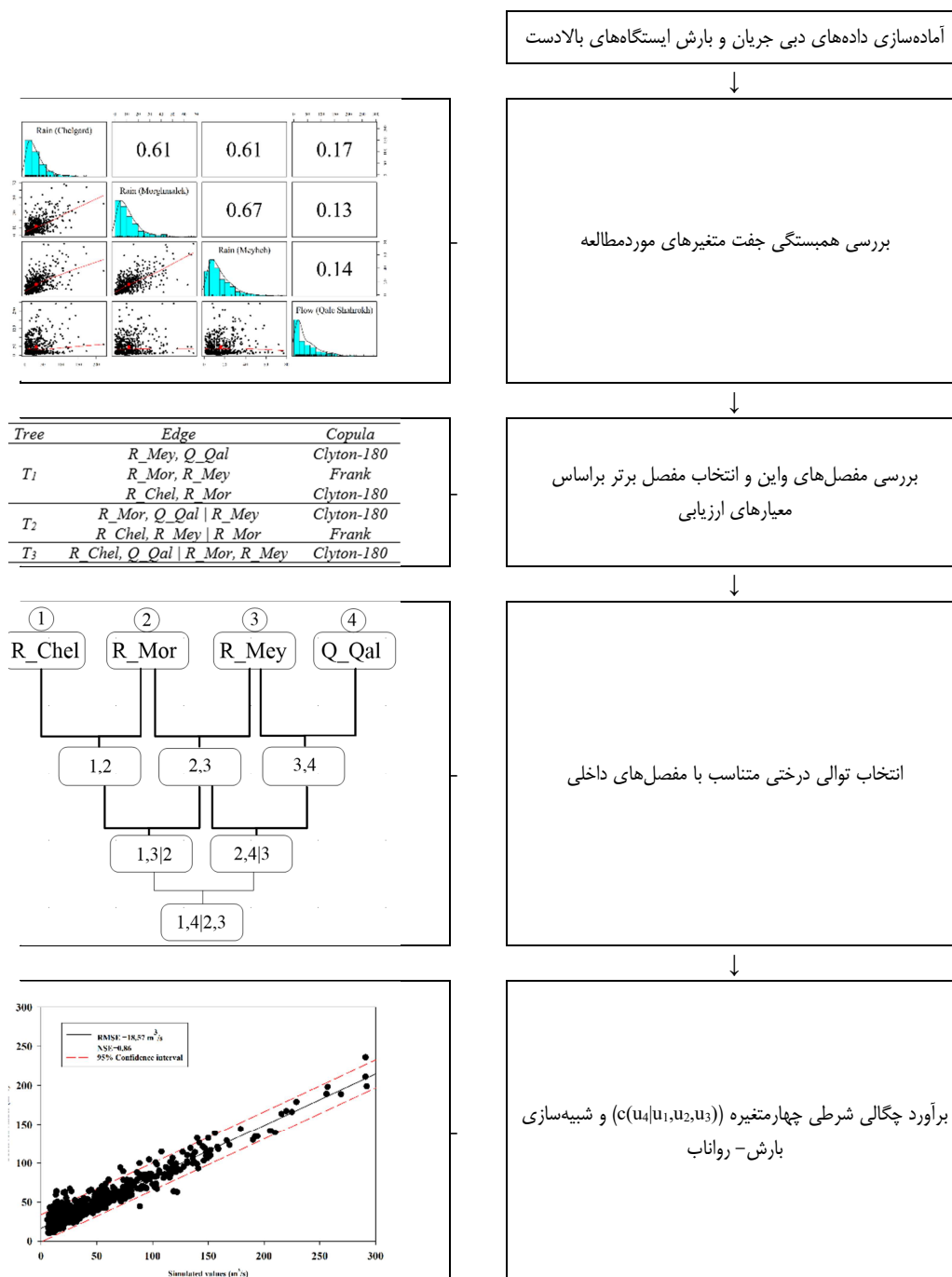


Figure 4. Flowchart of research steps

### ۳. نتایج و بحث

در این مطالعه، جهت شبیه‌سازی و تحلیل فراوانی همزمان دبی جریان در خروجی زیرحوضه قلعه شاهرخ واقع در حوضه سد زاینده‌رود، از داده‌های بارش در ایستگاه‌های بالادست در دوره آماری ۱۳۹۸-۱۳۷۲ استفاده شد. نمودار تغییرات اولیه داده‌های مورد بررسی به صورت شکل (۵) می‌باشد. همبستگی بین متغیرهای مورد مطالعه به همراه ابر پراکندگی و

هیستوگرام آن‌ها نیز به صورت شکل (۶) می‌باشد. با توجه به شکل (۶) می‌توان وجود همبستگی بین متغیرهای مورد مطالعه را تأیید کرد. هیستوگرام داده‌های مورد مطالعه نیز نشان‌دهنده شباهت توزیع پراکندگی متغیرهای مورد مطالعه می‌باشد.

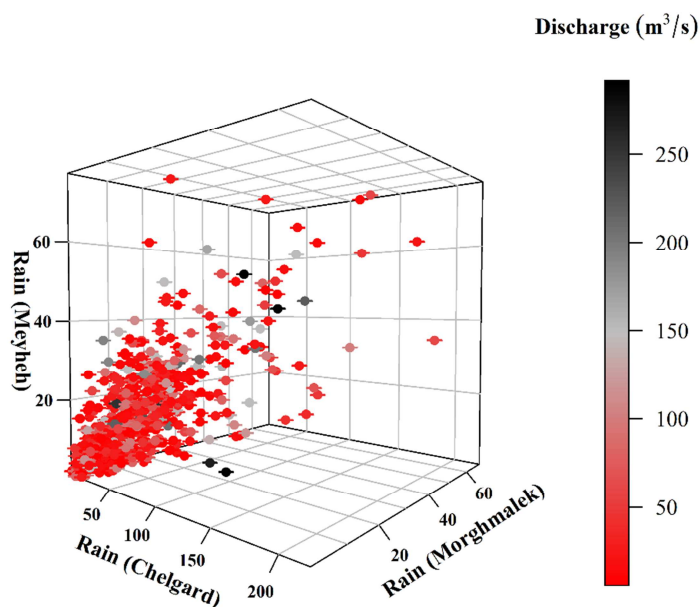


Figure 5. Observed values of rainfall (mm) and flow ( $m^3/s$ ) in the studied stations

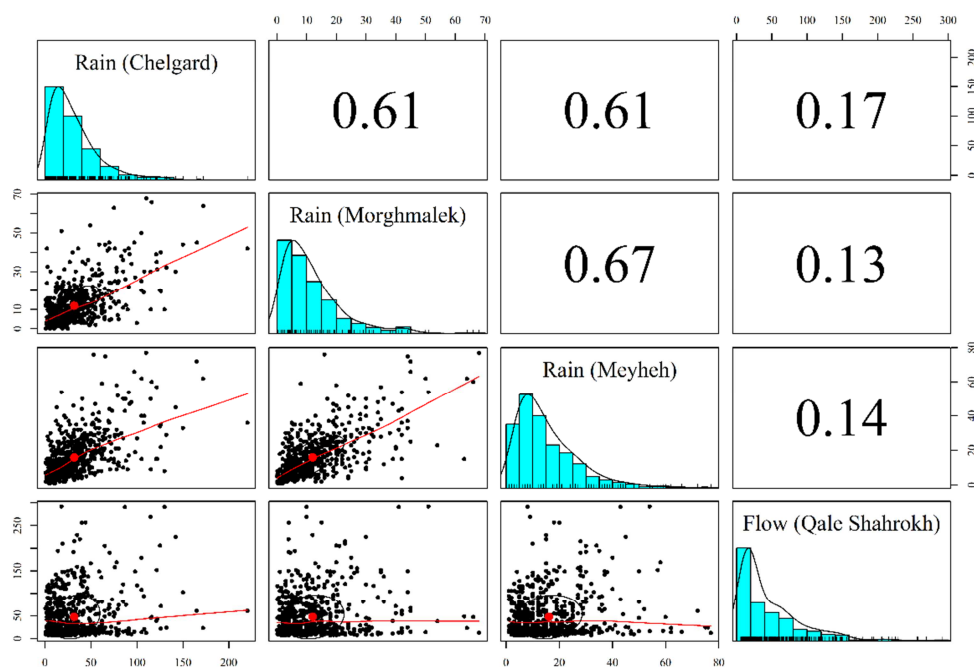


Figure 6. Correlation, scatter cloud and histogram of the initial values of rainfall (mm) and flow discharge ( $m^3/s$ ) in the studied stations

در ادامه برای مقادیر بارش ایستگاه‌های چلگرد، میهه و مرغملک به ترتیب از واژه R\_Mey، R\_Chel و R\_Mor و برای مقادیر دبی جریان ایستگاه قلعه شاهرخ از واژه Q\_Qal در جداول استفاده می‌شود. در این مطالعه ساختارهای مختلف مفصل و این اعم از R، C و D مورد بررسی قرار گرفت. ساختارهای درختی مفصل‌های ذکر شده در حالت‌های مختلف بررسی شده و براساس معیارهای ارزیابی AIC، BIC و Log Likelihood ساختار درختی مناسب انتخاب می‌شود. با بررسی ساختارهای مختلف یادشده، مفصل D-vine با ضرایب  $AIC=-743.7$ ،  $BIC=-716.7$  و  $Log Likelihood=377.8$  به عنوان مفصل برتر انتخاب شد. نتایج بررسی ساختار مفصل D-vine در تحلیل چهاربعدی در منطقه مورد مطالعه نیز به شرح جدول (۱) و شکل (۷) ارائه شد. نتایج بررسی ساختار D-vine با استفاده از داده‌های موجود نشان داد که در درخت اول همبستگی قابل قبولی بین جفت متغیرها وجود دارد و با افزایش رتبه درخت‌ها، این همبستگی تا انتها حفظ می‌شود. با استناد به مقادیر همبستگی تائو کندال و فیزیک مسئله، مفصل D-vine انتخاب مناسبی می‌باشد. همان‌طور که از جدول (۱) مشخص است، مفصل کلایتون ۱۸۰ درجه و فرانک به عنوان مفصل‌های داخلی انتخاب شده‌اند. مفصل کلایتون ۱۸۰ درجه، مفصل دورانی خانواده کلایتون می‌باشد که با توجه به پوشش دامنه وابستگی جفت متغیرها در جهات مختلف قابل دوران می‌باشد. این دوران در مورد سایر توابع مفصل نیز امکان‌پذیر است. این افزایش و بالابودن مقادیر تائو کندال در درخت‌های بالاتر، میزان اعتماد به مدل را افزایش می‌دهد. همچنین نتایج نشان داد که براساس معیارهای AIC، BIC و Log-Likelihood، در تمامی درخت‌های مورد بررسی در مفصل منتخب، مفصل‌های داخلی کلایتون ۱۸۰ درجه و فرانک به عنوان مفصل برتر انتخاب شدند. استفاده از مفصل‌های دورانی داخلی می‌تواند مقادیر تائو کندال را در تمامی جهات بررسی کرده و دقت مدل‌سازی و شبیه‌سازی‌ها را افزایش می‌دهد. در نهایت سایر مراحل با استفاده از مفصل D-vine و مفصل‌های داخلی ارائه شده در جدول (۱) ادامه می‌یابد.

Table 1. The structure of D-vine in the correlation analysis of the studied values

Tree	Edge	Copula	Tau	Par
T <sub>1</sub>	R_Mey, Q_Qal	Clyton-180	0.14	0.16
	R_Mor, R_Mey	Frank	0.67	5.58
	R_Chel, R_Mor	Clyton-180	0.61	1.02
T <sub>2</sub>	R_Mor, Q_Qal   R_Mey	Clyton-180	0.57	0.06
	R_Chel, R_Mey   R_Mor	Frank	0.61	2.39
T <sub>3</sub>	R_Chel, Q_Qal   R_Mor, R_Mey	Clyton-180	0.40	0.09

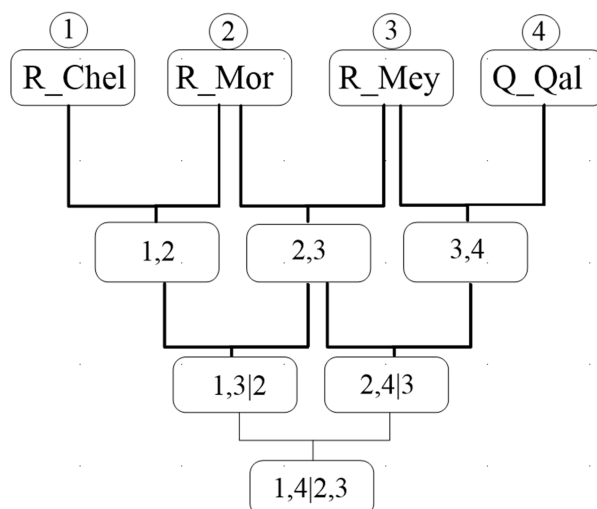


Figure 7. The tree structure of the selected D-vine in the 4-D analysis of the studied values

### ۱.۳. شبیه‌سازی مبتنی بر واین

در ادامه جهت بررسی دقت مفصل‌های منتخب اقدام به شبیه‌سازی مقادیر دبی جریان ایستگاه قلعه شاهرخ با استفاده از مقادیر بارش در ایستگاه‌های بالادست گردید. با استفاده از چگالی شرطی توابع مفصل و مقادیر موردبررسی در مقیاس مفصلی، پارامتر وابسته (دبی جریان) شبیه‌سازی شد. بعد از بررسی و تأیید مفصل‌های منتخب، به بررسی چگالی شرطی مفصل چهاربعدی پرداخته شد. ابتدا با استفاده از مقادیر دبی جریان و  $(u_4|u_1, u_2, u_3)$  اقدام به پیش‌بینی و تخمین مقادیر دبی جریان متأثر از سایر پارامترهای موردبررسی شد. بدین منظور ابتدا با ثابت قرار دادن مقادیر دبی جریان و به‌ازای مقادیر  $(u_4|u_1, u_2, u_3)$  مقادیر مفصل محاسبه شد. بیش‌ترین مقدار محور  $x$  برابر با مقدار موردانتظار دبی جریان برآورد می‌شود. مقادیر جدید دبی جریان محاسبه‌شده نشان‌دهنده حالت شرطی دبی جریان متناظر با تغییرات بارش می‌باشد. در این راستا با استفاده از توابع مفصل موردبررسی مقادیر دبی جریان به شرط وقوع بارش ایستگاه‌های بالادست شبیه‌سازی شده و نتایج به‌صورت شکل‌های (۸) و (۹) ارائه شد. با توجه به شکل (۸) می‌توان مشاهده کرد که مدل شبیه‌سازی مبتنی بر مفصل به‌خوبی توانسته است دامنه تغییرات داده‌های مشاهداتی را پوشش دهد. نقاط کمینه و بیشینه در این مدل به‌خوبی شبیه‌سازی شده و اختلاف زیادی بین مقادیر مشاهداتی و شبیه‌سازی‌شده وجود ندارد. مدل شبیه‌سازی مبتنی بر مفصل به‌دلیل اعمال مقادیر بارش در شبیه‌سازی‌ها توانسته است نتایج خوبی ارائه کرده و نقاط حدی را به‌خوبی پوشش دهد. با توجه به شکل (۹) نیز می‌توان مشاهده کرد که میزان خطای شبیه‌سازی در رویکرد مبتنی بر مفصل حدود  $۱۸/۵۷$  مترمکعب بر ثانیه می‌باشد. ضریب کارایی مدل نیز در شبیه‌سازی چندمتغیره دبی جریان در حوضه آبریز مورد مطالعه حدود  $۰/۸۶$  می‌باشد. با توجه به حدود اطمینان  $۹۵$  درصد شبیه‌سازی در شکل (۹) می‌توان مشاهده کرد که چهار مورد کم‌تخمینی و چندین مورد بیش‌تخمینی در شبیه‌سازی مقادیر دبی جریان به شرط وقوع مقادیر بارش وجود دارد.

متوسط مقادیر دبی جریان در ایستگاه مورد مطالعه حدود  $۴۷/۵۶$  مترمکعب بر ثانیه بوده و این عدد برای مقادیر شبیه‌سازی‌شده حدود  $۴۷/۸۰$  مترمکعب بر ثانیه برآورد شده است. کمینه مقادیر شبیه‌سازی‌شده در دوره آماری موردبررسی حدود دو برابر متوسط مقادیر مشاهداتی می‌باشد. پس از بررسی چگالی شرطی، از توابع مفصل برای بیان ساختار وابستگی بین سیگنال‌های موردبررسی به‌منظور محاسبه دوره‌های بازگشت دبی جریان استفاده شد. بررسی دوره بازگشت شرطی دبی جریان متناسب با بارش در منطقه مورد مطالعه در مدت دوام‌های دو،  $۱۰$ ،  $۲۰$ ،  $۵۰$  و  $۱۰۰$  ساله پرداخته شد. در نهایت دوره بازگشت هم‌زمان مقادیر دبی جریان در دوره بازگشت‌های دو تا  $۱۰۰$  ساله برآورد و به شرح شکل (۱۰) ارائه شد.

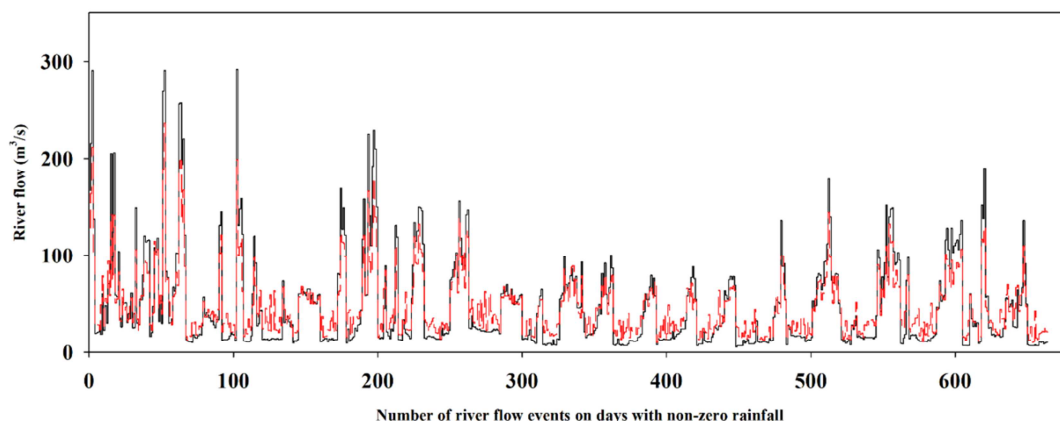


Figure 8. Simulation and observation values of flow discharge given by the rainfall in upstream stations

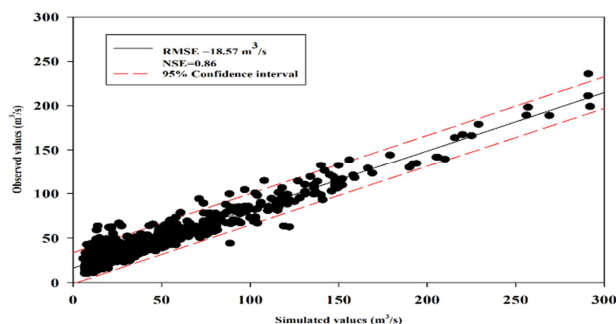


Figure 9. 95% confidence intervals of simulation and observation values of flow discharge given by the rainfall values in upstream stations

با توجه به شکل (۱۰) می‌توان مشاهده کرد که با دوره بازگشت‌های مختلف، احتمالات مختلف وقوع شرطی دبی جریان در ایستگاه قلعه شاهرخ به وجود می‌آید. با دوره بازگشت‌های مختلف، مقادیر دبی جریان در محل مورد مطالعه از صفر تا ۳۰۰ مترمکعب بر ثانیه متغیر می‌باشد. تفاوت دوره بازگشت تک متغیره با دوره بازگشت چندمتغیره و هم‌زمان، این است که در حالت تک‌متغیره یک عدد به‌عنوان دوره بازگشت معرفی می‌شود، درحالی‌که در حالت هم‌زمان، یک بازه با احتمالات مختلف در اختیار کاربر قرار می‌دهد که می‌تواند به‌عنوان حالت کلی برای تخمین دبی جریان با دوره بازگشت‌های مختلف و احتمال مختلف ارائه کند. با توجه به شکل (۱۰) می‌توان مشاهده کرد که برای دوره بازگشت دو ساله احتمال وقوع شرطی مقادیر دبی جریان تا کم‌تر از ۵۰ درصد کاهش می‌یابد. از آنجا که انتظار وقوع دوره بازگشت دو ساله در هر سال وجود دارد، می‌توان مشاهده کرد که با افزایش احتمال وقوع، مقدار دبی جریان کاهش می‌یابد. تا احتمال ۵۰ درصد، روند نزولی در کاهش مقادیر دبی جریان در دوره بازگشت دو ساله قابل توجه بوده و پس از آن روندی تقریباً ثابت را در بر می‌گیرد. نتایج نشان داد که با توجه به شرایط حاکم بر منطقه مورد مطالعه از نظر بارش، دبی جریان بیش از ۵۰ مترمکعب بر ثانیه به‌طور متوسط در منطقه مورد مطالعه دور از انتظار نیست. با توجه به مطالعات مختلف در زمینه تغییرات آب‌وهوایی و توزیع و پراکندگی بارش‌ها (Khalili *et al.*, 2016; Tahroudi *et al.*, 2019) جبران کسری آب زیرزمینی و افزایش سطح آب به‌دلیل وجود بارش‌های حدی و به‌هم‌خوردن ساختمان خاک بسیار سخت خواهد بود که در آینده مشکل‌ساز خواهد شد. لذا با توجه به شرایط موجود لزوم مدیریت منابع آب سطحی بیش از پیش احساس می‌شود. در شکل (۱۰) هر دوره بازگشت دامنه تغییراتی از دبی جریان با احتمالات مختلف را نشان می‌دهد که تنها در شرایط هم‌زمان و چندمتغیره امکان‌پذیر است. به‌طور مثال، در دوره بازگشت ۱۰ ساله، با احتمال ۰/۹۹ تا ۰/۰۹ می‌توان دبی جریان را برآورد کرد. این مزیت در مطالعات Nazeri Tahroudi *et al.* (2022 a, b) نیز مشاهده کرد.

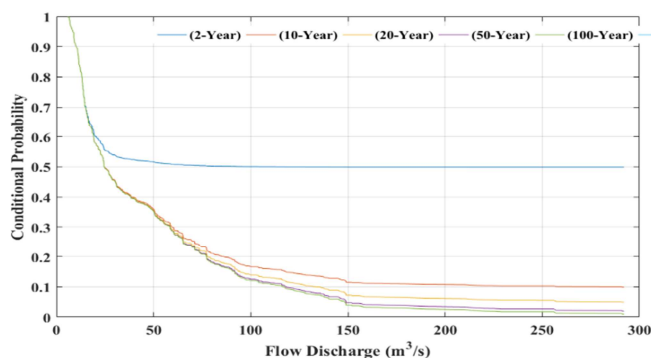


Figure 10. The return period of the flow discharge given by the occurrence of rainfall corresponding to the conditional probabilities

#### ۴. نتیجه‌گیری

در این مطالعه، شبیه‌سازی و تحلیل فراوانی هم‌زمان دبی جریان و بارش ایستگاه‌های بالادست زیرحوضه قلعه شاهرخ در دوره آماری ۱۳۹۸ تا ۱۳۷۲ با استفاده از مفصل‌های خانواده واین صورت پذیرفت. بدین منظور، ضمن بررسی مفصل‌های چهاربعدی خانواده واین و توالی درختی آن‌ها براساس معیارهای AIC، BIC و Log-Likelihood، ساختارهای مفصل‌های C-vine، D-vine و R-vine و همچنین حالت‌های دورانی، گاوسی و مستقل آن‌ها موردبررسی قرار گرفت. با توجه به معیارهای ارائه‌شده و فیزیک مسئله، مفصل D-vine به‌عنوان مفصل مناسب‌تر انتخاب شد. نتایج بررسی ساختار درختی مفصل‌های موردبررسی نشان داد که مفصل D-vine در عین حفظ فیزیک مسئله، با انتخاب لبه‌های برتر، همبستگی جفت متغیرها را تا آخرین درخت حفظ می‌کند. همچنین با انتخاب و معرفی مفصل‌های دورانی کلایتون در حالت ۱۸۰ درجه، ساختار وابستگی در کل دامنه تغییرات داده‌ها موردبررسی قرار گرفت. در نهایت شبیه‌سازی مقادیر دبی جریان با توجه به مقادیر بارش ایستگاه‌های بالادست با استفاده از مفصل D-vine و مفصل‌های داخلی کلایتون ۱۸۰ درجه و فرانک صورت گرفت. نتایج شبیه‌سازی مقادیر دبی جریان بیانگر کارایی ۸۶ درصد مدل پیشنهادی و میزان خطای ۱۸/۵۷ مترمکعب بر ثانیه بود. شبیه‌سازی موفقیت‌آمیز پارامترها یاد شده در واقع دلیلی بر انتخاب دقیق ساختار درختی مفصل D-vine می‌باشد. این مدل موفق شد متوسط تغییرات داده‌ها را با دقت بالایی شبیه‌سازی کند که حدود اطمینان ۹۵ درصد نیز این موضوع را تأیید کرد. اما هدف اصلی این پژوهش استفاده از توابع چگالی شرطی جهت تحلیل فراوانی هم‌زمان و احتمال وقوع شرطی دبی جریان به شرط وقوع بارش در ایستگاه‌های بالادست می‌باشد که با استفاده از چگالی شرطی  $c(Q\_Qal, R\_Chel, R\_Mey, R\_Mor)$  برآورد شد. با به‌کارگیری این مدل، با توجه به احتمالات مختلف ارائه‌شده می‌توان مقادیر دبی جریان را تخمین زد. رویکرد پیشنهادی با توجه به چندمتغیره‌بودن و برقراری شرط وقوع، از قطعیت بالایی در شبیه‌سازی و برآورد احتمال وقوع دبی جریان برخوردار است. این رویکرد با ارائه نمودارهای مشخص برای هر منطقه می‌تواند در مدیریت سیلاب با توجه به افزایش بارش‌های حدی مورد استفاده قرار گرفته و مفید باشد. به‌جای مفصل واین در این مطالعه می‌توان از مفصل‌های تودرتو نیز استفاده کرد، اما پیچیدگی‌های مرحله‌ای مفصل تودرتو نسبت به مفصل واین در حالت چهاربعدی افزایش می‌یابد. روش پیشنهادی در شبیه‌سازی بارش-رواناب به‌دلیل استفاده از توزیع آماری داده‌ها و همچنین توالی درختی متناسب با جفت متغیرها هیچ محدودیت جغرافیایی و اقلیمی ندارد.

#### ۵. تشکر و قدردانی

این اثر تحت حمایت مادی صندوق حمایت از پژوهش‌گران و فناوران کشور (INSF) برگرفته شده از طرح شماره "۴۰۰۵۰۱۱" انجام شده است.

#### ۶. پی‌نوشت‌ها

1. Dependency model
2. Archimedean functions
3. Non-Archimedean function
4. Plackett
5. Cascade of simple building blocks
6. Chain law
7. Drawable vine trees
8. Canonical vine trees
9. Nested trees

## ۷. تعارض منافع

هیچ‌گونه تعارض منافع توسط نویسندگان وجود ندارد.

## ۸. منابع

- Aas, K., Czado, C., Frigessi, A., & Bakken, H. (2009). Pair-copula constructions of multiple dependence. *Insurance: Mathematics and economics*, 44(2), 182-198.
- Adamson, P.T., Metcalfe, A.V., & Parmentier, B. (1999). Bivariate extreme value distributions: an application of the Gibbs sampler to the analysis of floods. *Water Resources Research*, 35(9), 2825-2832.
- Bedford, T., & Cooke, R. (2001). *Probabilistic risk analysis: foundations and methods*. Cambridge University Press.
- Czado, C. (2019). Analyzing dependent data with vine copulas. *Lecture Notes in Statistics, Springer*, 222.
- Dastourani, M., & Nazeri Tahroudi, M. (2022). Toward coupling of groundwater drawdown and pumping time in a constant discharge. *Applied Water Science*, 12(4), 1-13.
- Favre, A. C., El Adlouni, S., Perreault, L., Thiémonge, N., & Bobée, B. (2004). Multivariate hydrological frequency analysis using copulas. *Water Resources Research*, 40(1).
- Favre, A. C., Musy, A., & Morgenthaler, S. (2002). Two-site modeling of rainfall based on the Neyman-Scott process. *Water Resources Research*, 38(12), 43-1.
- Joe, H. (1997). *Multivariate models and multivariate dependence concepts*: Chapman and Hall/CRC.
- Kao, S. C., & Govindaraju, R. S. (2007). A bivariate frequency analysis of extreme rainfall with implications for design. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, 112(D13).
- Khalili, K., Tahoudi, M. N., Mirabbasi, R., & Ahmadi, F. (2016). Investigation of spatial and temporal variability of precipitation in Iran over the last half century. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 30(4), 1205-1221.
- Khashei, A., Shahidi, A., Nazeri-Tahroudi, M., & Ramezani, Y. (2022). Bivariate simulation and joint analysis of reference evapotranspiration using copula functions. *Iranian Journal of Irrigation & Drainage*, 16(3), 639-656.
- Khozeymehnezhad, H., & Nazeri-Tahroudi, M. (2020). Analyzing the frequency of non-stationary hydrological series based on a modified reservoir index. *Arabian Journal of Geosciences*, 13(5), 1-13.
- Kurowicka, D., & Cooke, R. M. (2007). Sampling algorithms for generating joint uniform distributions using the vine-copula method. *Computational statistics & data analysis*, 51(6), 2889-2906.
- Li, F., & Zheng, Q. (2016). Probabilistic modelling of flood events using the entropy copula. *Advances in Water Resources*, 97, 233-240.
- Nash, J. E., & Sutcliffe, J. V. (1970). River flow forecasting through conceptual models part I-A discussion of principles. *Journal of Hydrology*, 10(3), 282-290.
- Nazeri Tahroudi, M., Ramezani, Y., De Michele, C., & Mirabbasi, R. (2022a). Application of Copula Functions for Bivariate Analysis of Rainfall and River Flow Deficiencies in the Siminehrood River Basin, Iran. *Journal of Hydrologic Engineering*, 27(11), 05022015.
- Nazeri Tahroudi, M., Ramezani, Y., De Michele, C., & Mirabbasi, R. (2022b). Application of copula-based approach as a new data-driven model for downscaling the mean daily temperature. *International Journal of Climatology*. DOI: 10.1002/joc.7752
- Nazeri Tahroudi, M., Ramezani, Y., De Michele, C., & Mirabbasi, R. (2022c). Trivariate joint frequency analysis of water resources deficiency signatures using vine copulas. *Applied Water Science*, 12(4), 1-15.

- Nazeri Tahroudi, M., Ramezani, Y., De Michele, C., & Mirabbasi, R. (2022d). Multivariate analysis of rainfall and its deficiency signatures using vine copulas. *International Journal of Climatology*, 42(4), 2005-2018.
- Nazeri Tahroudi, M., Ramezani, Y., De Michele, C., & Mirabbasi, R. (2021). Flood routing via a copula-based approach. *Hydrology Research*, 52(6), 1294-1308.
- Nelsen, R. B. (2006). An introduction to copulas, ser. *Lecture Notes in Statistics*. New York: Springer.
- Pham, M. T., Vernieuwe, H., De Baets, B., & Verhoest, N. (2018). A coupled stochastic rainfall-evapotranspiration model for hydrological impact analysis. *Hydrology and Earth System Sciences*, 22(2), 1263-1283.
- Pronoos Sedighi, M., Ramezani, Y., Nazeri Tahroudi, M., & Taghian, M. (2022). Joint frequency analysis of river flow rate and suspended sediment load using conditional density of copula functions. *Acta Geophysica*, 1-13.
- Salvadori, G., & De Michele, C. (2007). On the use of copulas in hydrology: theory and practice. *Journal of Hydrologic Engineering*, 12(4), 369-380.
- Sklar, M. (1959). Fonctions de repartition an dimensions et leurs marges. *Publ. inst. statist. univ. Paris*, 8, 229-231.
- Tabatabaei, S. M., Dastourani, M., Eslamian, S., & Nazeri Tahroudi, M. (2022). Ranking and optimizing the rain-gauge networks using the entropy-copula approach (Case study of the Siminehrood Basin, Iran). *Applied Water Science*, 12(9), 1-13.
- Nazeri Tahroudi, M., Pourreza-Bilondi, M., & Ramezani, Y. (2019). Toward coupling hydrological and meteorological drought characteristics in Lake Urmia Basin, Iran. *Theoretical and Applied Climatology*, 138(3), 1511-1523.
- Wang, R., Zhao, C., Zhang, J., Guo, E., Li, D., Alu, S., & Dong, Z. (2019). Bivariate copula function-based spatial-temporal characteristics analysis of drought in Anhui Province, China. *Meteorology and Atmospheric Physics*, 131(5), 1341-1355.
- Xiao, Y., Guo, S., Liu, P., & Fang, B. (2008). A new design flood hydrograph method based on bivariate joint distribution. *IAHS Publications-Series of Proceedings and Reports*, 319, 75-82.
- Yue, S., Ouarda, T. B. M. J., & Bobée, B. (2001). A review of bivariate gamma distributions for hydrological application. *Journal of Hydrology*, 246(1-4), 1-18.
- Zhang, D., Yan, M., & Tsopanakis, A. (2018). Financial stress relationships among Euro area countries: an R-vine copula approach. *The European Journal of Finance*, 24(17), 1587-1608.
- Zhang, L., & Singh, V. (2006). Bivariate flood frequency analysis using the copula method. *Journal of Hydrologic Engineering*, 11(2), 150-164.