مدیریت آب و آبیاری
دوره ۱۱ ■ شماره ٤ ■ زمستان ۱٤۰۰
صفحه‌های ٦۹۸-٦۸۳
DOI: 10.22059/jwim.2021.329149.911

مقاله پژوهشی:

حل تحلیلی معادله انتقال آلودگی با ضرایب متغیر در رودخانه با استفاده از تبدیل لاپلاس

محمدجواد فردادی شیل‌سر[۱]، مهدی مظاهری[۲*]، جمال محمد ولی سامانی[۳]
۱. دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی و مدیریت آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران.
۲. دانشیار، گروه مهندسی و مدیریت آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران.
۳. استاد، گروه مهندسی و مدیریت آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران.
تاریخ دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۰۵/۳۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۷/۳۰

چکیده

رودخانه‌ها یکی از مهم‌ترین منابع طبیعی آب در جهان به‌شمار می‌روند. مدل‌سازی انتقال آلودگی در رودخانه‌ها توسط معادله دیفرانسیل جزئی جابه‌جایی- پراکندگی- واکنش (ADRE) انجام می‌گیرد. در پژوهش حاضر، با استفاده از تبدیل لاپلاس که یک ابزار قدرتمند و مفید در حل معادلات دیفرانسیل می‌باشد، پاسخ تحلیلی معادله ADRE در دامنه محدود با ضرایب متغیر به‌ازای شرایط مرزی بالادست و پایین‌دست دیریکله در رودخانه به‌دست آمد. به‌منظور استفاده از حل تحلیلی موجود در این پژوهش، سه مثال ارائه شد که در هرکدام رودخانه مد نظر، به بازه‌های دو، چهار و هشت قسمتی تقسیم شده است، که ضمن متغیربودن پارامترهای جریان، آلاینده و هندسه رودخانه در هر سه مثال، برای هرکدام از مثال‌ها، دقت حل تحلیلی موجود در زمانی‌که تقسیم‌بندی بازه‌ها بیش‌تر می‌شود در مقایسه با حل عددی بررسی شده است. با مشخص‌کردن ماتریس‌های سرعت، ضریب پراکندگی، سطح مقطع و ... به‌عنوان ورودی مسأله، ماتریس انتشار محاسبه و به‌دنبال آن دستگاه معادلات پیچیده‌ای ایجاد می‌شود که پیچیدگی کار را دوچندان می‌کند. با حل دستگاه معادلات مذکور، مقدار غلظت آلاینده محاسبه می‌شود. به‌منظور اعتبارسنجی حل تحلیلی موجود، از حل عددی استفاده می‌شود، نتایج نشان داد که هرچه تعداد تقسیم‌بندی‌های رودخانه بیش‌تر باشد، دقت حل بالاتر می‌رود و دو حل تحلیلی و عددی دارای انطباق خوبی با یکدیگر خواهند بود. باتوجه به توانایی و عملکرد حل تحلیلی موجود، می‌توان اذعان داشت که حل تحلیلی موجود در این پژوهش می‌تواند به‌عنوان ابزاری جهت صحت‌سنجی و اعتبارسنجی حل‌های عددی و سایر حل‌های تحلیلی برای ضرایب متغیر معادله مورد استفاده قرار گیرد.

کلیدواژه‌ها: تابع توزیع غلظت، دامنه محدود، مدل‌سازی ریاضی، معادله جابه‌جایی- پراکندگی- واکنش.

Analytical solution of the pollution transport equation with variable coefficients in river using the Laplace Transform

Mohammad Javad Fardadi Shilsar[1], Mehdi Mazaheri[1*], Jamal Mohammad Vali Samani[3]
1. Master Student, Department of Water Engineering and Management, Faculty of Agriculture, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.
2. Associate Professor, Department of Water Engineering and Management, Faculty of Agriculture, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.
3. Professor, Department of Water Engineering and Management, Faculty of Agriculture, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.
Received: August 21, 2021 Accepted: October 22, 2021

Abstract

Rivers are one of the most important natural water resources in the world. Pollution transport modeling in rivers is performed by the partial advection-dispersion-reaction equation (ADRE). In the present study, using the Laplace transform, which is a powerful and useful tool in solving differential equations, the analytical solution of the ADRE equation was obtained in a finite domain with variable coefficients for the upstream and downstream Dirichlet boundary conditions and the initial zero condition in the river. To use the analytical solution in this study, three examples are presented, each of which, the river are divided into two, four, and eight parts, which, while the parameters of flow, pollution, and river geometry are variable in all three examples, for each of the examples, the accuracy of the analytical solution available when the segmentation of the intervals increases as compared to the numerical solution. By specifying the matrices of velocity, dispersion coefficient, cross-section, etc. as input to the problem, the diffusion matrix is calculated and, consequently, a complex system of equations is created that doubles the complexity of the work. The amount of pollutant concentration is calculated by solving the system of the above equations. The numerical solution is used to validate the existing analytical solution, the results showed that the greater the number of river divisions, the higher the accuracy of the solution, and the two analytical and numerical solutions will be well compatible with each other. Given the ability and performance of the existing analytical solution, it can be acknowledged that the analytical solution in this study can be used as a tool to validate and verification numerical solutions and other analytical solutions for the coefficients of the equation.

Keywords: Advection-dispersion-reaction equation, Concentration distribution function, Finite domain, Mathematical modeling.

* نویسنده مسئول
Email: m.mazaheri@modares.ac.ir

مقدمه

رودخانه‌ها به‌عنوان یکی از مهم‌ترین منابع طبیعی آب در جهان به‌شمار می‌روند که تمامی فعالیت‌های بشر به آن‌ها وابسته است، لذا امروزه این منبع طبیعی در معرض انواع آلودگی‌های شیمیایی و بیولوژیکی قرار دارد (Hemond & Fechner, 2014)، بنابراین می‌توان گفت که رودخانه‌ها به‌عنوان ارزشمندترین اما در عین‌حال پر سوء استفاده‌ترین منابع آب روی زمین به‌شمار می‌روند (Smits *et al.*, 2000).

اولین و مهم‌ترین فرایند انتقال آلودگی در رودخانه‌ها از یک مکان به مکان دیگر توسط جریان آب، فرایند جابه‌جایی[1] می‌باشد (Gulliver, 2007). از فرایند مهم دیگر در بحث انتقال آلودگی در رودخانه، فرایند پراکندگی[2] بوده که توسط فیک[3] ثابت شده است (Gulliver, 2007). در رودخانه‌ها عموماً فرایند جابه‌جایی در بحث انتقال آلودگی غالب است، اما فرایند پراکندگی نیز اثرگذار می‌باشد (Chapra, 2008). معادله حاکم بر انتقال و انتشار آلودگی در رودخانه‌ها، معادله جابه‌جایی- پراکندگی- واکنش[4] (ADRE) بوده که از نوع معادلات دیفرانسیل سهموی غیرهمگن، خطی و مرتبه دوم می‌باشد و از ترکیب فرایندهای جابه‌جایی و پراکندگی طبق قانون اول فیک، برای حالت یک‌بعدی، جریان غیریکنواخت و غیر ماندگار با ضرایب متغیر به‌صورت معادله (۱) بیان می‌شود (Chapra, 2008):

$$\frac{\partial(Ac)}{\partial t}=-\frac{\partial(Qc)}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(AD\frac{\partial c}{\partial x}\right)-AKc+AS \qquad (1)$$

در رابطه (۱)، $c=c(x,t)$ غلظت آلودگی در مکان x و زمان t، A سطح مقطع جریان، Q دبی جریان رودخانه، D ضریب پراکندگی در راستای x، K ضریب زوال واکنش و $S=S(x,t)$ ترم منبع می‌باشد. با حل معادله (۱) تابع توزیع غلظت آلودگی به‌دست می‌آید که می‌توان با استفاده از آن مقدار غلظت را در هر مکان و زمان محاسبه نمود. به‌طورکلی می‌توان گفت که تمامی معادلات دیفرانسیل را می‌توان با استفاده از روش‌های عددی حل نمود، اما گاهی اوقات استفاده از روش‌های عددی در مقایسه با حل‌های تحلیلی بسیار هزینه‌بر و وقت‌گیر می‌باشد، هم‌چنین حل‌های عددی همواره به‌دلیل محدودیت‌های انتخاب گام زمانی و مکانی مناسب و بررسی شرط پایداری دارای خطا هستند. این در حالی است که این محدودیت‌ها در حل‌های تحلیلی وجود ندارد و حل‌های تحلیلی به‌دلیل دقت بالا می‌تواند به‌عنوان ابزاری جهت صحت‌سنجی حل‌های عددی به‌کار رود (Guerrero *et al.*, 2009). به‌منظور یافتن پاسخ تحلیلی معادله (ADRE) در حالت یک‌بعدی، دو بعدی و سه‌بعدی، پژوهش‌گران بسیاری توانستند روش‌های متفاوتی ارائه دهند، که بیش‌تر آن‌ها مبتنی بر فرض‌هایی نظیر شرط مرزی ساده و یا متغیر، وجود یا عدم وجود ترم منبع برای معادله، ضرایب ثابت و یا متغیر معادله (شامل، سرعت، سطح مقطع جریان، ضریب پراکندگی) می‌باشند. لازم به ذکر است که، اکثر این راه‌حل‌های تحلیلی ارائه‌شده توسط پژوهش‌گران در محیط متخلخل بوده و این حل‌ها در محیط رودخانه برای ضرایب ثابت معادله محدود و برای ضرایب متغیر بسیار محدود می‌باشد.

در زمینه حل تحلیلی معادله انتقال آلودگی در محیط متخلخل با ضرایب ثابت، پژوهش‌گرانی توانستند معادله مذکور را در حالت یک‌بعدی، دو بعدی و سه بعدی با استفاده از تابع گرین[5] با صرف‌نظرکردن از گرادیان سرعت در راستای عرض و عمق حل نمایند (Park & Zhan, 2001). در پژوهشی که توسط Wang & Wu (2009) با استفاده از تابع گرین انجام شد، معادله سه‌بعدی ADE با ضرایب ثابت و با درنظرگرفتن منبع آلاینده برابر با یک مقدار ثابت و شرط مرزی ورودی ثابت در محیط متخلخل حل شد. یکی دیگر از روش‌های حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل استفاده از روش تبدیل انتگرالی

تعمیم‌یافته[6] (GITT) است که قادر است معادلات دیفرانسیل پیچیده، با شرایط مرزی پیچیده و دامنه حل را حل نماید (Cotta *et al*., 2016). در پژوهشی، معادله یک‌بعدی ADE را با ضرایب ثابت و با درنظرگرفتن شرط مرزی رابین در بالادست با الگوی زمانی دلخواه با روش تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته در محیط متخلخل به‌صورت تحلیلی حل نمودند و انتشار آلاینده‌های مربوط به واکنش‌های زنجیره‌ای را بررسی کردند (Chen *et al*., 2012). Kumar & Sudheendra (2018) طی پژوهشی، معادله یک‌بعدی انتقال آلودگی را با درنظرگرفتن شرط مرزی نوع اول و سوم در بالادست به‌صورت الگوی زمانی تابع نمایی با ترکیب روش تبدیل لاپلاس[7] و تبدیل انتگرالی GITT به‌صورت تحلیلی حل کردند. هم‌چنین می‌توان اذعان داشت که روش تبدیل لاپلاس در بحث کاربرد آن در زمینه حل معادله یک‌بعدی انتقال آلودگی مدنظر بسیاری از پژوهش‌گران نظیر Simpson & Ellery (2014)، Heaton *et al*. (2012) و Williams & Tomasko (2008) در دامنه محدود و یا نیمه‌محدود بوده است. روش تبدیل لاپلاس، یکی از ابزارهای قدرتمند و مفید حل تحلیلی بوده، که می‌تواند مسائل پیچیده ریاضی را به‌صورت تحلیلی حل نماید، در همین راستا می‌توان به پژوهش Carr (2020) اشاره نمود، وی در پژوهش خود با استفاده از تبدیل لاپلاس، معادله یک‌بعدی ADRE را برای یک محیط متخلخل m لایه با شرایط مرزی بالادست و پایین‌دست از نوع رابین با فرض ثابت‌بودن سرعت و ضریب پراکندگی حل نمود، سپس با استفاده از الگوریتم‌های لاپلاس‌گیری معکوس عددی مقدار غلظت را در هر لایه محاسبه کرد و درنهایت به‌منظور صحت‌سنجی، از حل عددی و سایر حل‌های تحلیلی موجود استفاده نمود. روش تبدیل فوریه[8] یکی از قدیمی‌ترین روش تحلیلی حاضر است که از آن می‌توان در حل معادله انتقال آلودگی در محیط متخلخل بهره برد. در پژوهشی، Yang *et al*. (2019) با استفاده از تبدیل معکوس فوریه[9] و توزیع گسترده گاوسی[10] معادله یک‌بعدی انتقال آلودگی را با مشتق سازگار توسعه دادند و به معادله CADE[11] تبدیل کردند و نشان دادند که حل تحلیلی خود برای توصیف دقیق سیال و انتقال املاح دقت بالایی دارد.

به‌منظور حل تحلیلی معادله ADRE با ضرایب متغیر در محیط متخلخل، روش‌های تحلیلی قدرتمندی نظیر تابع گرین، تبدیل فوریه و تبدیل لاپلاس وجود دارند که می‌توانند مدل‌سازی انتقال آلودگی را در محیط متخلخل با ضرایب متغیر انجام دهند. در این راستا، در پژوهشی، با استفاده از تابع گرین، پاسخ معادله یک‌بعدی ADE با ضرایب متغیر در یک دامنه نامحدود، در حالی در محیط متخلخل به‌دست آمد که سرعت و ضریب پراکندگی به‌صورت تابعی از مکان و زمان درنظر گرفته و با مدل عددی اعتبارسنجی شد (Sanskrityayn *et al*., 2021). در پژوهشی دیگر، Sanskrityayn *et al*. (2017) با ترکیب روش تابع گرین و تغییر متغیر، معادله انتقال آلودگی را با درنظرگرفتن الگوی آلودگی نقطه‌ای و سرعت و ضریب پراکندگی نقطه‌ای تابعی از زمان و مکان حل کردند. از کاربردهای دیگر روش تابع گرین می‌توان به توانایی آن در حل معادلات دوبعدی ADRE با ضرایب متغیر و نشان‌دادن اثر سرعت جریان و ضریب پراکندگی با الگوی آلودگی نقطه‌ای در آب‌های زیرزمینی اشاره نمود (Sanskrityayn *et al*., 2018). در پژوهش دیگر، Bharati *et al*. (2019) با درنظرگرفتن ضریب پراکندگی با وابستگی مکانی در یک چارچوب هندسی و اقلیدسی، اقدام به حل معادله یک‌بعدی انتقال آلودگی با استفاده از تبدیل فوریه در آب زیرزمینی نمودند. هم‌چنین به‌منظور کاربرد روش تبدیل لاپلاس، طی دو پژوهشی که توسط

پژوهش‌گران انجام شد، پاسخ تحلیلی معادله یک‌بعدی انتقال آلودگی با ضرایب متغیر در محیط متخلخل با درنظرگرفتن سرعت به‌صورت خطی تابعی از مکان و ضریب پراکندگی به‌صورت تابعی از زمان و مکان استخراج شد (Kumar *et al.*, 2009, 2010).

حل معادله انتقال آلودگی در رودخانه با ضرایب ثابت نیز توسط روش‌های تحلیلی نظیر، تابع گرین، انتگرال تعمیم‌یافته، تبدیل فوریه و تبدیل لاپلاس امکان‌پذیر است. در پژوهشی که توسط Adrian *et al.* (1994) صورت گرفت، با استفاده از تبدیل GITT، معادله یک‌بعدی ADRE را در یک دامنه نیمه‌محدود با فرض ثابت‌بودن سرعت و ضریب پراکندگی در رودخانه حل نمودند و حل خود را جهت صحت‌سنجی با دو حل Dresnack & Dobbins (1968) و Yu *et al.* (1991) مقایسه کردند. به‌منظور کاربرد تابع گرین در حل معادله انتقال آلودگی در رودخانه، در پژوهشی پاسخ تحلیلی معادله یک‌بعدی و دو بعدی مذکور با ضرایب ثابت به‌ازای چندین منبع آلاینده نقطه‌ای با الگوی زمانی نامنظم توسط پژوهش‌گرانی استخراج شد و جهت اعتبارسنجی از حل عددی استفاده گردید (Mashhadgarme *et al.*, 2017). Shukla (2002) با استفاده از تبدیل فوریه معادله یک‌بعدی انتقال آلودگی را در رودخانه در حالی حل نمود که فرض‌هایی نظیر ثابت‌بودن ضرایب معادله، شرط اولیه به‌صورت تابع نمایی و شرط مرزی بالادست به‌صورت توابع متناوب کسینوسی و سینوسی در نظر گرفت. یکی دیگر از روش‌های تحلیلی حاضر، روش تبدیل لاپلاس بوده که توانایی بالایی در حل معادلات دیفرانسیل در انواع دامنه‌های حل دارد، بدین منظور، در پژوهشی Genuchten *et al.* (2013)، معادله انتقال آلودگی را با فرض ثابت‌بودن سرعت و ضریب پراکندگی در رودخانه، در حالت‌های یک‌بعدی، دو بعدی و سه‌بعدی به‌ازای شرایط مرزی بالادست نوع اول، دوم و سوم در دامنه‌های نامحدود، نیمه‌محدود و محدود با استفاده از تبدیل لاپلاس به‌صورت تحلیلی حل نمودند. در پژوهشی دیگر، Mazaheri *et al.* (2013) معادله یک‌بعدی انتقال آلودگی را با ضرایب ثابت، به‌ازای فعالیت منابع نقطه‌ای با الگوی نامنظم با به‌کارگیری روش تبدیل لاپلاس در رودخانه حل نمودند و حل خود برای چندین منبع آلودگی گسترش دادند. لازم به‌ذکر است که در خصوص برآورد و تخمین ضریب پراکندگی در رودخانه‌ها، پژوهش‌گران بسیاری در این راستا تلاش نموده‌اند (Balf *et al.*, 2018; Najafzadeh *et al.*, 2021; Noori *et al.*, 2017; Noori *et al.*, 2021).

در زمینه حل معادله ADRE با ضرایب متغیر در رودخانه، می‌توان به پژوهش Bavandpouri Gilan *et al.* (2017) اشاره نمود. ایشان معادله یک‌بعدی انتقال آلودگی را در یک دامنه محدود با روش انتگرال تعمیم‌یافته GITT در رودخانه حل کردند و حل خود را با حل عددی و سایر حل‌های تحلیلی صحت‌سنجی نمودند و به این نتیجه رسیدند که حل تحلیلی دارای دقت بالاتری نسبت به حل‌های عددی در رودخانه می‌باشد.

با توجه به پژوهش‌های انجام‌گرفته تاکنون، تقریباً تمامی حل‌های موجود برای معادله ADRE با ضرایب ثابت در محیط متخلخل و رودخانه می‌باشد و حل‌های تحلیلی صورت‌گرفته برای معادله مذکور با ضرایب متغیر محدود بوده و اکثراً برای محیط متخلخل انجام گرفته است و می‌توان اذعان داشت که در محیط رودخانه، حل تحلیلی برای معادله ADRE با ضرایب متغیر بسیار محدود می‌باشد. دلیل این امر را می‌توان پیچیدگی معادله مذکور، دشواری حل، محدودیت‌های روش‌های حل تحلیلی، حجم بالای محاسبات و ... دانست. بنابراین، مهم‌ترین

جنبه نوآوری در این پژوهش، ارائه یک راه‌حل تحلیلی کلی برای معادله جابه‌جایی- پراکندگی- واکنش با ضرایب متغیر با استفاده از روش تبدیل لاپلاس با شرایط مرزی متغیر در رودخانه بوده، که حل موجود براساس اصول فیزیکی استخراج‌شده و انعطاف‌پذیر می‌باشد و در انتها نیز، حل تحلیلی موجود در این پژوهش جهت اعتبارسنجی با حل عددی در رودخانه مقایسه می‌شود.

مبانی تئوری و روش‌ها

روش تبدیل لاپلاس، یک تبدیل انتگرالی مفید و قدرتمند به‌عنوان یکی از روش‌های حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل بوده، که به‌کارگیری روش‌های ترسیمی برای پیش‌بینی عملکرد سیستم را بدون حل واقعی معادلات دیفرانسیل ممکن می‌سازد. از مزایای روش تبدیل لاپلاس در حل معادلات دیفرانسیل می‌توان موارد زیر را اشاره نمود (Kreyszig, 2008):

۱- مسائل را به‌طور مستقیم حل می‌کند، یعنی اعمال مسائل مقدار شرط اولیه در آن آسان است.

۲- معادلات دیفرانسیل معمولی غیرهمگن بدون درنظرگرفتن حل اولیه برای تبدیل آن به معادلات دیفرانسیل همگن با این روش حل می‌شوند.

۳- مهم‌ترین مزیت آن استفاده از توابع هوی‌ساید[۱۲] و دلتای دیراک[۱۳] است که تحت وجود ترم منبع پیچیده استفاده از این روش را آسان می‌سازد.

٤- با حل معادله دیفرانسیل توسط روش تبدیل لاپلاس، می‌توان هر دو مؤلفه گذار و حالت ماندگار جواب را یک‌جا محاسبه کرد (Korn & Korn, 2000)

رویکرد مدل‌سازی و معادلات اساسی

به‌منظور مدل‌سازی انتقال و انتشار آلاینده در رودخانه‌ها با استفاده از معادله ADRE با ضرایب متغیر، شکل (۱) مدنظر خواهد بود. در شکل (۱)، فرض می‌شود که رودخانه موردنظر به n بازه تقسیم می‌شود، بنابراین $\{i, j, k, \dots, m-1, m\}$ نقطه ایجاد می‌شود و هر بازه دارای طول‌های $L_1, L_2, \dots, L_{n-1}, L_n$ می‌باشد، پس با توجه به معادله (۱)، برای هر بازه مقدار غلظت، ضریب زوال واکنش، سرعت، مساحت و ضریب پراکندگی نیز متفاوت است (دبی ثابت شده است و از ترم منبع صرف‌نظر می‌شود).

با توجه به شکل (۱) می‌توان نتیجه گرفت که با حل معادله ADRE با ضرایب ثابت برای یک بازه می‌توان آن را برای n بازه تعمیم داد، لذا در ابتدا فرض می‌شود که رودخانه مدنظر هیچ تقسیم‌بندی ندارد و به‌صورت یک بازه با دو نقطه i در ورودی و j در خروجی درنظر گرفته می‌شود و آلاینده با فرایندهای جابه‌جایی و پراکندگی در طول مسیر رودخانه حرکت می‌کند، بنابراین معادله حاکم بر انتقال و انتشار آلاینده در رودخانه در دامنه محدود $0 \le x \le L_{ij}$ به‌صورت معادله (۲) می‌باشد:

$$\frac{\partial c_{ij}}{\partial t} = D_{ij}\frac{\partial^2 c_{ij}}{\partial x^2} - V_{ij}\frac{\partial c_{ij}}{\partial x} - K_{ij}c_{ij} \tag{۲}$$

$$IC: c_{ij}(x,0) = 0 \tag{۳}$$

در روابط بالا c_{ij} بیانگر تابع غلظت آلاینده در واحد طول در مکان x و زمان t، D_{ij} ضریب پراکندگی، V_{ij} سرعت متوسط جریان و K_{ij} ضریب زوال واکنش می‌باشد و معادله (۳) شرط اولیه در رودخانه را نشان می‌دهد. باتوجه به متغیربودن ضرایب در هر بازه، لازم است c_{ij} در واحد طول در نظر گرفته شود تا مساحت، که یک پارامتر کلیدی در ضرایب متغیر محسوب می‌شود، از طریق معادله (٤) که بیانگر شرط مرزی رودخانه است، در معادلات بعدی ظاهر شود، لذا:

$$BC: \begin{cases} c_{ij}(0,t) = A_{ij}c_i(t) \\ c_{ij}(L_{ij},t) = A_{ij}c_j(t) \end{cases} \tag{٤}$$

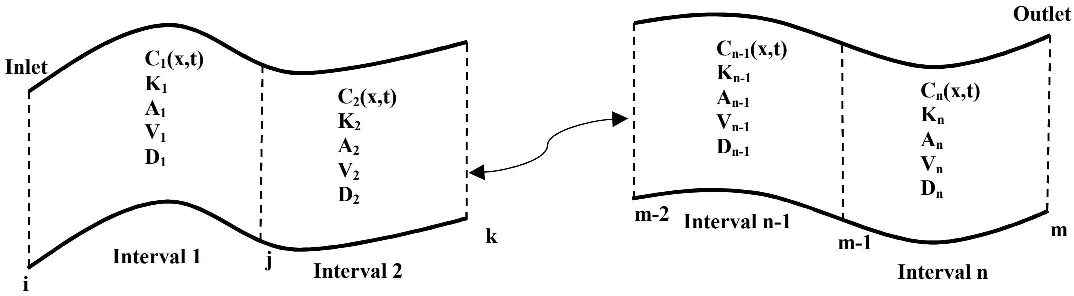

Figure 1. Schematic of the river in modeling

باتوجه به قانون اول فیک، که بیانگر مجموع فرایندهای جابه‌جایی و پراکندگی در بحث انتقال جرم محسوب می‌شود، می‌توان معادله (۵) را به‌کار برد، که این معادله، شار عبوری از نقطه ورودی i به نقطه خروجی j در رودخانه را نشان می‌دهد.

$$J_{ij}(t) = \left[V_{ij}c_{ij}(x,t) - D_{ij}\frac{\partial c_{ij}(x,t)}{\partial x}\right]_{x=0} \qquad (۵)$$

به‌منظور تعمیم یک بازه به n بازه در رودخانه، می‌توان گفت که شار عبوری به هر بازه طبق معادله (٦) درنظر گرفته می‌شود.

$$I_i(t) = \sum_j \left[V_{ij}c_{ij}(x,t) - D_{ij}\frac{\partial c_{ij}(x,t)}{\partial x}\right]_{x=0} \qquad (٦)$$

همان‌طور که ذکر شد، معادله‌های (۵) و (٦) هر دو بیانگر اصل فیزیکی براساس قانون فیک می‌باشند و از مجموع فرایندهای جابه‌جایی و پراکندگی استخراج شده‌اند و تنها تفاوت آنها با یکدیگر در این است که معادله (۵) شار عبوری آلودگی در یک نقطه را نشان می‌دهد، اما با توجه به این‌که در پژوهش حاضر، تقسیم‌بندی‌هایی برای رودخانه موردنظر به‌منظور شبیه‌سازی با ضرایب متغیر بایستی صورت گیرد. لذا برای نقاط بینابینی، شار ورودی به هر نقطه بیش‌تر از یک واحد طول تقسیم شده است، پس به‌منظور تعمیم به چند بازه، بایستی معادله (٦) به‌کار گرفته شود.

حل تحلیلی معادله ADRE به‌ازای یک بازه رودخانه

به‌منظور حل تحلیلی معادله انتقال آلودگی در رودخانه یعنی معادله (۲)، در دامنه محدود $0 \le x \le L_{ij}$ و شرایط مرزی بالادست و پایین‌دست به‌صورت دریکله (X_{11})، در ابتدا از معادلات (۲) و (٤) نسبت به t لاپلاس گرفته می‌شود، دلیل اعمال تبدیل لاپلاس در معادله انتقال آلودگی بر متغیر زمان این است که دامنه t (زمان) نامحدود بوده و اعمال آن بر متغیر مکان که دامنه آن محدود است امکان‌پذیر نمی‌باشد، بنابراین معادلات لاپلاس گیری‌شده (۷) و (۸) به‌دست می‌آید:

$$(s + K_{ij})C_{ij} + V_{ij}\frac{\partial C_{ij}}{\partial x} - D_{ij}\frac{\partial^2 C_{ij}}{\partial x^2} = 0 \qquad (۷)$$

$$BC:\begin{cases} C_{ij}(0,s) = A_{ij}C_i(s) \\ C_{ij}(L_{ij},s) = A_{ij}C_j(s) \end{cases} \qquad (۸)$$

هم‌چنین از معادله (٦) که بیانگر شارعبوری در هر بازه رودخانه می‌باشد نیز، لاپلاس گرفته می‌شود، لذا:

$$\varphi_i(s) = \sum_j \left[V_{ij}C_{ij}(x,s) - D_{ij}\frac{\partial C_{ij}(x,s)}{\partial x}\right]_{x=0} \qquad (۹)$$

در معادله (۹)، $\varphi_i(s)$ تبدیل لاپلاس $I_i(t)$ می‌باشد. باتوجه به معادله (۷) که یک معادله دیفرانسیل معمولی[١٤] همگن بوده و ریشه‌های آن فقط به‌ازای $s > 0$ دارای جواب است، با حل آن، دو ثابت B_1 و B_2 ایجاد می‌شود که در معادله (۱۰)، که پاسخ تحلیلی معادله (۷) می‌باشد، وجود دارند.

$$C_{ij}(x,s) = B_1 e^{\frac{V_{ij}+\alpha_{ij}(s)}{2D_{ij}}x} + B_2 e^{\frac{V_{ij}-\alpha_{ij}(s)}{2D_{ij}}x} \quad (۱۰)$$

که در آن:

$$\alpha_{ij}(s) = \sqrt{{V_{ij}}^2 + 4D_{ij}(s+K_{ij})} \quad (۱۱)$$

جهت محاسبه دو ثابت B_1 و B_2 ایجاد شده در معادله (۱۰)، از معادله (۸) که بیانگر شرط مرزی لاپلاس گرفته شده از معادله (٤) است استفاده می‌شود، بنابراین:

$$C_{ij}(0,s) = B_1 + B_2 = A_{ij}C_i(s) \quad (۱۲)$$

$$C_{ij}(L_{ij},s) = B_1 e^{\left(\frac{V_{ij}L_{ij}}{2D_{ij}}+\frac{\alpha_{ij}(s)L_{ij}}{2D_{ij}}\right)} + B_2 e^{\left(\frac{V_{ij}L_{ij}}{2D_{ij}}-\frac{\alpha_{ij}(s)L_{ij}}{2D_{ij}}\right)} = A_{ij}C_j(s).$$

با درنظرگرفتن دو نسبت بی‌بعد معادلات (۱۳) برای هر بازه رودخانه و جایگذاری آن در معادلات (۱۲)، ضرایب B_1 و B_2 محاسبه می‌گردد.

$$\theta_{ij} = \frac{V_{ij}L_{ij}}{2D_{ij}} \quad , \qquad \xi_{ij}(s) = \frac{\alpha_{ij}(s)L_{ij}}{2D_{ij}} \quad (۱۳)$$

$$B_1 = \frac{A_{ij}C_j(s)e^{-\theta_{ij}} - A_{ij}C_i(s)e^{-\xi_{ij}(s)}}{2\sinh(\xi_{ij}(s))} \quad (۱٤)$$

به‌طور مشابه:

$$B_2 = \frac{A_{ij}C_i(s)e^{\xi_{ij}(s)} - A_{ij}C_j(s)e^{-\theta_{ij}}}{2\sinh(\xi_{ij}(s))} \quad (۱۵)$$

با محاسبه ثابت‌های B_1 و B_2 یعنی معادلات (۱٤) و (۱۵) و جایگذاری آن‌ها در معادله (۱۰)، تابع غلظت آلودگی با ضرایب ثابت در یک بازه رودخانه به‌صورت معادله (۱٦) محاسبه می‌شود.

$$C_{ij}(x,s) = A_{ij}C_i(s)\frac{sinh\left(\frac{L_{ij}-x}{L_{ij}}\xi_{ij}(s)\right)}{\sinh\left(\xi_{ij}(s)\right)}e^{\frac{x\theta_{ij}}{L_{ij}}} + A_{ij}C_j(s)\frac{sinh\left(\frac{x}{L_{ij}}\xi_{ij}(s)\right)}{\sinh\left(\xi_{ij}(s)\right)}e^{\frac{x-L_{ij}}{L_{ij}}\theta_{ij}} \quad (۱٦)$$

تعمیم حل تحلیلی معادله ADRE به‌ازای یک بازه رودخانه به n بازه در رودخانه

با حل معادله انتقال آلودگی با ضرایب ثابت در یک بازه رودخانه، اکنون به بررسی تعمیم حل مذکور در یک رودخانه دارای n بازه پرداخته می‌شود، بدین منظور با مدنظر داشتن معادله (۹) که بیانگر شار عبوری در هر بازه رودخانه است، با درنظرگرفتن معادلات (۱۳) و (۱٦)، و اعمال تغییرات لازم در آن‌ها برای قرارگیری در معادله (۹)، معادله نهایی (۱۷) محاسبه خواهد شد، لذا:

$$\varphi_i(s) = \sum_j\left[A_{ij}C_i(s)\left\{\frac{V_{ij}}{2}+\frac{\alpha_{ij}(s)}{2\tanh(\xi_{ij}(s))}\right\} - A_{ij}C_j(s)\left\{\frac{\alpha_{ij}(s)e^{-\theta_{ij}}}{2\sinh(\xi_{ij}(s))}\right\}\right] \quad (۱۷)$$

با توجه به معادله (۱۷)، با معلوم‌بودن تبدیل لاپلاس غلظت آلودگی در هر بازه رودخانه یعنی $\bar{C}(s) = \{C_1(s),\dots,C_m(s)\}$، جایی‌که m تعداد نقاط است، می‌توان تبدیل لاپلاس $\bar{\varphi}(s) = \{\varphi_1,\dots,\varphi_m\}$ (تبدیل لاپلاس $\bar{I}$) را محاسبه نمود و $\bar{C}(s)$ را به‌دست آورد. به‌عبارت دیگر، به‌ازای هر $C_1(s),\dots,C_m(s)$ یک معادله خطی وجود دارد و $\bar{C}(s)$ و $\bar{\varphi}(s)$ بردارهای ستونی می‌باشند، یعنی:

$$R(s)\bar{C}(s) = \bar{\varphi}(s) \quad (۱۸)$$

که در آن:

$$R_{ij}(s) = \begin{cases} \sum_k A_{ik}\left[\frac{V_{ik}}{2}+\frac{\alpha_{ik}(s)}{2\tanh(\xi_{ik}(s))}\right] & i=j \\ \frac{-A_{ij}\alpha_{ij}(s)e^{-\theta_{ij}}}{2\sinh(\xi_{ij}(s))} & \text{Otherwise} \end{cases} \quad (۱۹)$$

در معادله (۱۸) $R(\mathrm{s})$ ماتریس انتشار نامیده می‌شود که به‌ازای هر نقطه یک ردیف و یک ستون دارد. ماتریس $R(\mathrm{s})$ یک ماتریس نامتقارن و پراکنده $m\times m$ (m تعداد نقاط است) بوده که عناصر قطری (مورب) آن همگی مثبت است، هم‌چنین اگر اتصالی بین نقاط i و j وجود نداشته باشد، درایه‌های آن صفر و اگر اتصالی وجود داشته باشد عناصر آن منفی خواهد بود. لازم به‌ذکر است که تمامی درایه‌های این ماتریس از طریق رابطه (۱۹) نیز پر می‌شوند. به‌طور مثال، برای یک رودخانه‌ای که به چهار

بازه (دارای پنج نقطه) تقسیم شده باشد ماتریس انتشار آن به‌صورت شکل (۲) خواهد بود. در شکل (۲)، λ(s) تابعی برحسب متغیر s لاپلاس می‌باشد که برای عناصر قطری از رابطه قسمت بالای معادله (۱۹) و برای عناصر غیرقطری از رابطه قسمت پایینی معادله (۱۹) به‌دست می‌آید.

به‌طورکلی، با توجه به توابع $R(s)$ و $\bar{\varphi}(s)$، می‌توان ماتریس $\bar{C}(s)$ را با استفاده از الگوریتم‌های عددی حل دستگاه معادلات محاسبه نمود و مقدار غلظت‌های نقاط $C_1(s), \dots, C_m(s)$ را می‌توان با الگوریتم‌های لاپلاس‌گیری معکوس عددی نظیر CME[15] (Horváth *et al.*, 2020)، گاور- استهفست (Stehfest, 1970; Villinger, 1985)، تالبوت (Murli & Rizzardi, 1990) و ... به‌دست آورد، که در پژوهش حاضر، از الگوریتم لاپلاس‌گیری معکوس عددی CME به‌دلیل دقت و سرعت بالای محاسبات نسبت به الگوریتم‌های گاور- استهفست و تالبوت استفاده شده است. در این روش، لاپلاس‌گیری معکوس عددی براساس توزیع نمایی ماتریس متمرکز (CME) انجام می‌شود و ضمن حفظ دقت نتایج در مرتبه ۱۰۰۰ نیز از نظر عددی پایدار است، در حالی‌که سایر روش‌های در حال حاضر برای مرتبه ۱۰۰ ناپایدار می شوند، هم‌چنین هنگام کار با توزیع احتمالاتی، روش ایده‌آلی خواهد بود (Horváth *et al.*, 2020). روند کلی مدل‌سازی تحلیلی معادله انتقال آلودگی در رودخانه با ضرایب متغیر در فلوچارت شکل (۳) آمده است.

نتایج و بحث

به‌منظور ارزیابی و اعتبارسنجی روش ارائه‌شده در این پژوهش، سه مثال فرضی طراحی می‌شود که در هر یک، رودخانه موردنظر به دو بازه، چهار بازه و هشت بازه تقسیم می‌شود، که هدف این سه مثال، نشان‌دادن دقت حل تحلیلی موجود در این پژوهش در زمانی‌که تعداد تقسیم‌بندی‌ها زیاد شود، برای ضرایب متغیر معادله انتقال آلودگی می‌باشد. بدین منظور، در هر یک از سه مثال طول رودخانه یک مقدار ثابت برابر با ۱۲ کیلومتر بوده و مقادیر سرعت، ضریب پراکندگی و سطح مقطع جریان در هر مکان از این رودخانه در نمودارهای (٤) تا (٦) نشان داده شده است. هم‌چنین به‌منظور شبیه‌سازی هر یک از مثال‌ها، با صرف‌نظرکردن از ضریب زوال واکنش، زمان شبیه‌سازی ۱۲ ساعت و شرط مرزی غلظت ورودی به رودخانه مطابق شکل (۷) و شرط مرزی غلظت خروجی نیز به‌صورت حد بی‌نهایت غلظت درنظر گرفته شده است. در نهایت، برای ارزیابی حل تحلیلی صورت‌گرفته در این پژوهش، از حل عددی تمام ضمنی[16] تفاضل محدود[17] با تقریب مشتق مرکزی[18] در مکان با هدف کاهش مقدار پراکندگی عددی استفاده شده است و این دو حل با شاخص‌های خطای آماری نظیر ضریب همبستگی (R^2)، جذر میانگین مربع خطاها (RMSE) و میانگین خطای مطلق (MAE) مقایسه می‌شوند.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda_{11}(s)} & \boldsymbol{-\lambda_{12}(s)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{-\lambda_{21}(s)} & \boldsymbol{\lambda_{22}(s)} & \boldsymbol{-\lambda_{23}(s)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{-\lambda_{32}(s)} & \boldsymbol{\lambda_{33}(s)} & \boldsymbol{-\lambda_{34}(s)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{-\lambda_{43}(s)} & \boldsymbol{\lambda_{44}(s)} & \boldsymbol{-\lambda_{45}(s)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{-\lambda_{54}(s)} & \boldsymbol{\lambda_{55}(s)} \end{bmatrix}$$

Figure 2. The diffusion matrix shape is provided for the example

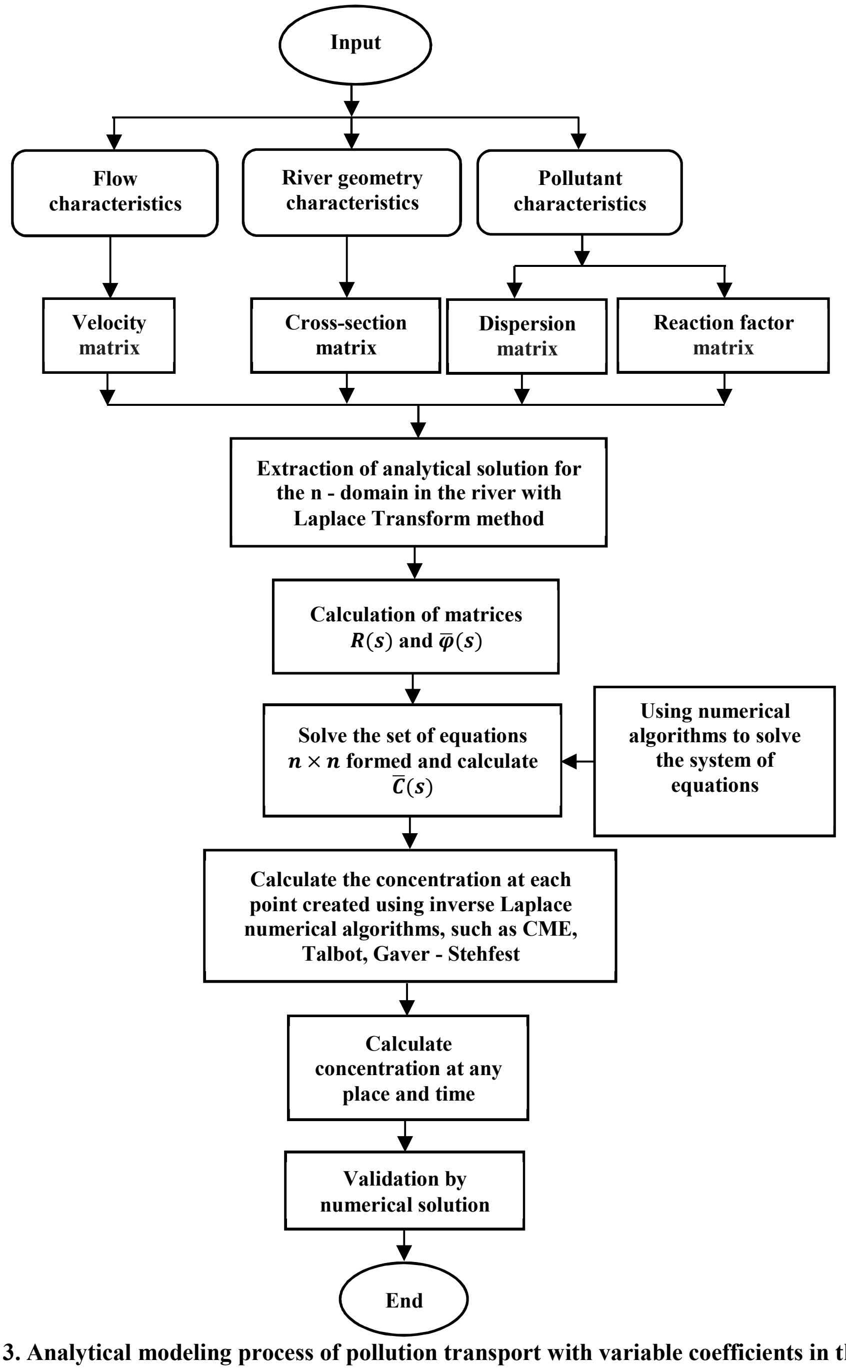

Figure 3. Analytical modeling process of pollution transport with variable coefficients in the river

مثال اول: ارزیابی حل تحلیلی در حالت تقسیم رودخانه به دو بازه

در مثال اول، رودخانه موردنظر به دو بازه شش کیلومتری تقسیم می‌شود، در این حالت باتوجه به شکل‌های (٤) تا (٦) با متوسط‌گیری از مقادیر سرعت، ضریب پراکندگی و سطح مقطع جریان در دو بازه صفر تا شش کیلومتری و شش تا ١٢ کیلومتری، به مدل‌سازی حل تحلیلی انجام‌شده با ضرایب متغیر پرداخته خواهد شد، لذا در این حالت برای هر کدام از پارامترهای موردنظر دو مقدار لحاظ شده است که در جدول (١) آمده است.

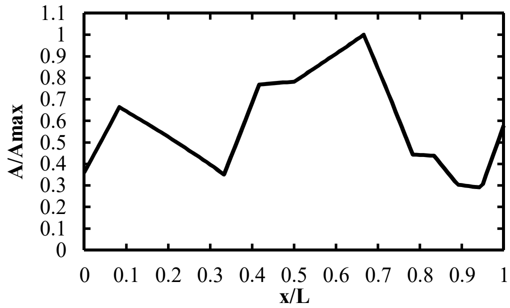

Figure 4. Variation of flow cross-section along the river

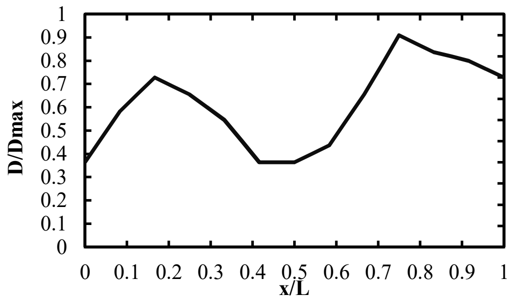

Figure 5. Variation of dispersion coefficient along the river

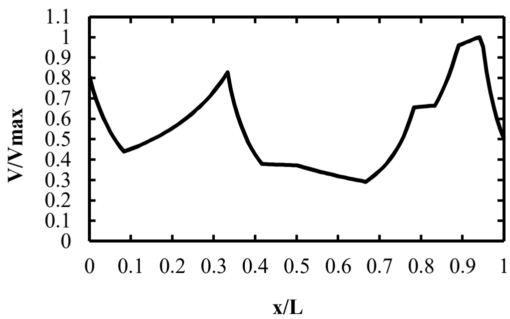

Figure 6. Variation of velocity along the river

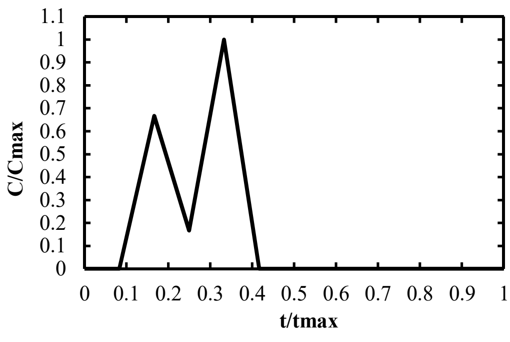

Figure 7. River inlet boundary condition

Table 1. The values of the flow and pollutant parameters in the example 1

Parameter	Interval 0 to 6 km	Interval 6 to 12 km
Velocity (m/s)	0.68	0.68
Dispersion coefficient (m^2/s)	14.46	18.85
Flow cross-section (m^2)	31.24	35.04

نتایج حاصل از شبیه‌سازی تحلیلی در دو زمان بی‌بعد شده ٠/٣٨٢ (از تقسیم زمان خروجی نمودار یعنی ١٦٥٠٠ ثانیه بر زمان کل شبیه‌سازی ١٢ ساعت معادل ٤٣٢٠٠ ثانیه به‌دست آمده است) و ٠/٥٣٢ (از تقسیم زمان خروجی نمودار یعنی ٢٣٠٠٠ ثانیه بر زمان کل شبیه‌سازی ١٢ ساعت معادل ٤٣٢٠٠ ثانیه به‌دست آمده است) در شکل (٨) و ارزیابی آن با حل عددی با استفاده از شاخص‌های آماری در جدول (٤) آمده است.

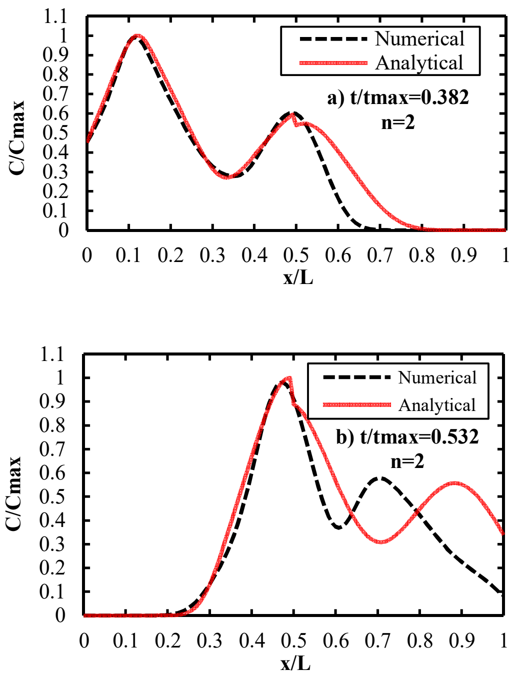

Figure 8. Comparison of spatial profile concentration of the two analytical and numerical solutions for the example 1 (for 2 Intervals) at times a) 0.382 and b) 0.532.

همان‌طورکه در شکل (٨) ملاحظه می‌شود، دقت حل تحلیلی با تقریب دو بازه‌ای برای رودخانه با ضرایب متغیر

پایین بوده و نسبت به حل عددی دارای انطباق خوبی نمی‌باشد. در واقع، این تفاوت بین حل تحلیلی و عددی موجود در این پژوهش، در کیلومتراژ ۰/۵ (بی‌بعدشده) تا یک در زمان‌های بی‌بعدشده ۰/۳۸۲ و ۰/۵۳۲ در شکل (۸) کاملاً گویا بوده و باتوجه به شاخص‌های آماری محاسبه‌شده برای این دو زمان در جدول (٤)، با گذشت زمان از میزان دقت کاهش می‌یابد. دلیل این امر را می‌توان تفاوت میزان ضرایب سرعت، ضریب پراکندگی و سطح مقطع جریان در کیلومتراژ ۰/۵ به بعد در رودخانه دانست. لازم به‌ذکر است که وجود خطاهای رایج در حل‌های عددی نظیر، خطای پراکندگی عددی، خطای گردکردن[19] و خطای کوتاه‌کردن[20] جملات ریاضی بسط تیلور در این اختلاف بی‌تأثیر نیست، بنابراین به‌منظور بالابردن دقت، لازم است تقسیم‌بندی رودخانه به بازه‌های کوچک‌تر بیش‌تر درنظر گرفته شود.

مثال دوم: ارزیابی حل تحلیلی در حالت تقسیم رودخانه به چهار بازه

در این بخش از شبیه‌سازی، رودخانه موردنظر به چهار بازه سه کیلومتری تقسیم می‌شود و مشخصات بازه‌ها به‌صورت جدول (۲) همراه با مقادیر متوسط‌گیری‌شده سرعت، ضریب پراکندگی و سطح مقطع جریان باتوجه به شکل‌های (٤) تا (٦)، آمده است.

نتایج حاصل از شبیه‌سازی تحلیلی با درنظرگرفتن تقسیم‌بندی رودخانه به چهار بازه، در دو زمان بی‌بعدشده ۰/۳۸۲ و ۰/۵۳۲ در شکل (۹) قابل مشاهده می‌باشد، هم‌چنین شاخص‌های آماری محاسبه‌شده جهت ارزیابی حل تحلیلی با حل عددی در جدول (٤) آمده است.

با توجه به شکل (a-۹)، دقت حل تحلیلی با تقریب چهار بازه‌ای با ضرایب متغیر در رودخانه تقریباً قابل قبول بوده و حل مذکور دارای انطباق خوبی با حل عددی می‌باشد، اما در ارتباط با شکل (b-۹)، اثر تغییر ضرایب سرعت، ضریب پراکندگی و مساحت، هم‌چنان به میزان کمی در کیلومتراژ ۰/۵ تا یک دیده می‌شود و این به‌معنی تفاوت مقدار زیاد این سه ضریب در کیلومتراژ مذکور می‌باشد، که می‌توان با استناد به مقایسه آماری صورت گرفته بین دو حل تحلیلی و عددی در جدول (٤)، که نشان از انطباق خوب دو حل می‌باشد، از این اختلاف در شکل (b-۹) صرف‌نظر نمود. هم‌چنین همان‌طور که قبلاً ذکر شد، این اختلاف ناچیز می‌تواند به‌علت خطاهای رایج در حل‌های عددی نیز باشد.

مثال سوم: ارزیابی حل تحلیلی در حالت تقسیم رودخانه به هشت بازه

در مثال سوم، جهت بالابردن دقت حل تحلیلی، رودخانه مورد نظر به هشت بازه ۱/۵ کیلومتری تقسیم شده که در جدول (۳)، مشخصات بازه‌ها همراه با مقادیر میانگین سرعت، ضریب پراکندگی و مساحت ذکر شده است. هم‌چنین نتایج مدل‌سازی حل تحلیلی در این بخش به‌ازای دو زمان ۰/۳۸۲ و ۰/۵۳۲ در شکل (۱۰) و نتایج آماری آن با حل عددی در جدول (٤) آمده است.

Table 2. The values of the flow and pollutant parameters in the example 2

Parameter	Interval 0 to 3 km	Interval 3 to 6 km	Interval 6 to 9 km	Interval 9 to 12 km
Velocity (m/s)	0.68	0.68	0.43	0.93
Dispersion coefficient (m^2/s)	16.29	13.14	16.07	22.5
Flow cross-section (m^2)	30.07	32.24	47.42	22.61

Table 3. The values of the flow and pollutant parameters in the example 3

Parameter	Interval 0 to 1.5km	Interval 1.5 to 3km	Interval 3 to 4.5km	Interval 4.5 to 6km	Interval 6 to 7.5km	Interval 7.5 to 9km	Interval 9 to 10.5km	Interval 10.5 to 12km
Velocity (m/s)	0.68	0.67	0.85	0.5	0.42	0.43	0.82	1.04
Dispersion coefficient (m^2/s)	14.25	18.75	15.5	10.63	12	19.88	23.63	21.38
Flow cross-section (m^2)	30.45	29.94	23.75	40.64	47.78	47.37	24.81	20.17

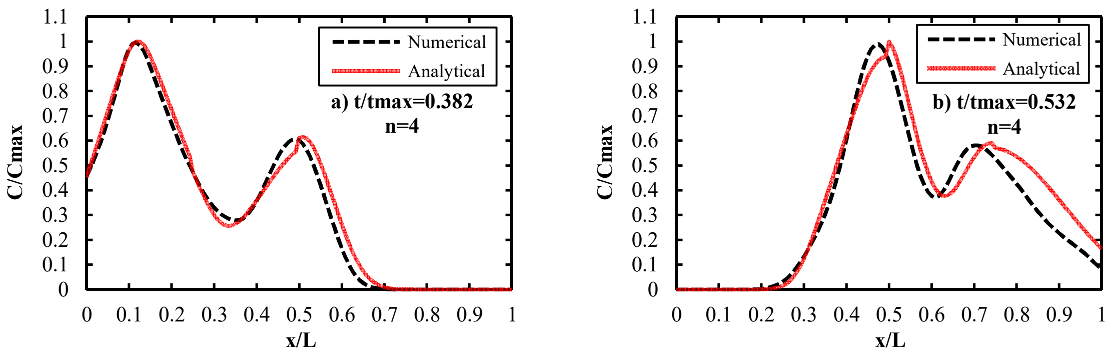

Figure 9. Comparison of spatial profile concentration of the two analytical and numerical solutions for the example 2 (for 4 Intervals) at times a) 0.382 and b) 0.532.

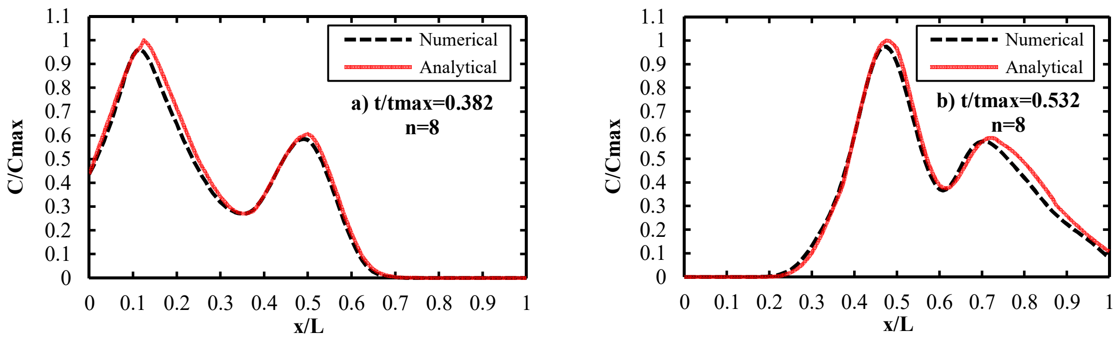

Figure 10. Comparison of spatial profile concentration of the two analytical and numerical solutions for the example 3 (for 8 Intervals) at times a) 0.382 and b) 0.532.

Table 4. Error indexes for the three examples

Index	Example 1		Example 2		Example 3	
	t/tmax=0.382	t/tmax=0532	t/tmax=0.382	t/tmax=0532	t/tmax=0.382	t/tmax=0532
RMSE (kg/m^3)	0.096	0.159	0.044	0.076	0.031	0.031
R^2 (%)	94.35	76.67	98.62	94.86	99.7	99.28
MAE (kg/m^3)	0.056	0.11	0.03	0.057	0.02	0.023

باتوجه به شکل (۱۰) دقت حل تحلیلی با تقریب هشت بازه‌ای در رودخانه با ضرایب متغیر بسیار عالی بوده و دو حل تحلیلی و عددی در هر دو زمان بی‌بعدشده ۰/۳۸۲ و ۰/۵۳۲ دارای انطباق بسیار خوبی با یکدیگر می‌باشند. همچنین مشکل اختلاف مقادیر ضرایب سرعت، ضریب پراکندگی و مساحت در کیلومتراژ ۰/۵ تا یک به‌دلیل تقسیم‌بندی رودخانه به هشت بازه و نزدیک‌بودن میانگین مقادیر مذکور به واقعیت، وجود ندارد و شاخص‌های آماری محاسبه‌شده در جدول (٤) دلالت بر این امر داشته است.

بنابراین می‌توان اذعان داشت که اختلاف بسیار ناچیز دو حل تحلیلی و عددی، به‌دلیل وجود خطاهای رایج در حل عددی می‌باشد و به‌منظور کم‌کردن این خطای ناچیز می‌توان گام زمانی و مکانی را تا حد ممکن کوچک‌تر درنظر گرفت.

به‌طورکلی، با ارائه این سه مثال می‌توان دریافت که شاخص‌های آماری نظیر ضریب همبستگی (R^2)، جذر میانگین مربع خطاها (RMSE) و میانگین خطای مطلق (MAE) با افزایش تعداد تقسیم‌بندی‌های رودخانه به بازه‌های کوچک‌تر، به‌ترتیب بیش‌تر، کم‌تر و کم‌تر می‌شوند،

که این امر دلالت بر بالارفتن دقت حل تحلیلی موجود در این پژوهش با افزایش تعداد بازه‌ها، دارد.

نتیجه‌گیری

با توجه به حائز اهمیت‌بودن مشکل آلودگی رودخانه‌ها، که یکی از مهم‌ترین منابع طبیعی آب موردنیاز بشر در جهان محسوب می‌شوند، بنابراین مسأله محاسبه غلظت آلاینده‌ها در رودخانه‌ها مهم بوده، که این امر با حل معادله اساسی آن یعنی معادله ADRE امکان‌پذیر می‌باشد و ازآنجایی‌که به‌کاربردن ضرایب متغیر در معادله مذکور علاوه بر این‌که پیچیدگی حل مسأله را زیاد می‌کند، به‌دلیل شرایط رودخانه و پارامترهای جریان، نتایج آن به واقعیت نسبت به ضرایب ثابت نزدیک‌تر است. لذا در پژوهش حاضر، مهم‌ترین نوآوری آن، استخراج پاسخ تحلیلی معادله ADRE با ضرایب متغیر در یک دامنه محدود با به‌کارگیری روش تبدیل لاپلاس با شرایط مرزی X_{11} (بالادست و پایین‌دست دیریکله) و براساس اصول فیزیکی در رودخانه بوده و حل موجود انعطاف‌پذیر می‌باشد. به‌منظور کاربرد حل تحلیلی موجود در این پژوهش، شبیه‌سازی‌هایی به‌ازای شرایط مرزی متغیر در سه مثال ارائه شد. این پژوهش نشان داد که روش تبدیل لاپلاس یک روش تحلیلی قوی بوده که علاوه بر توانایی حل معادلات دیفرانسیل پیچیده از جمله معادله ADRE با ضرایب متغیر، توانایی مدل‌سازی به‌ازای شرایط مرزی پیچیده‌تر را نیز دارا می‌باشد، هم‌چنین از معایب روش تبدیل لاپلاس نیز در حل مسائل انتقال آلودگی می‌توان به محدودیت‌های الگوریتم‌های لاپلاس‌گیری معکوس عددی اشاره نمود، که در این زمینه بایستی از الگوریتم‌هایی استفاده شود که ضمن داشتن توانایی لازم برای لاپلاس وارون‌گیری توابع پیچیده محاسبه‌شده برحسب متغیر s لاپلاس، دقت بالایی در محاسبات نیز داشته باشند. چراکه هرچه توابع برحسب s ایجاد شده پیچیده‌تر باشد، نمی‌توان لاپلاس وارون را به‌صورت تحلیلی گرفت، بنابراین باید از الگوریتم‌های لاپلاس‌گیری عددی‌ای استفاده کرد که دقت و سرعت محاسبات بالایی داشته باشند. نتایج نشان داد که هرچه تقسیم‌بندی طول رودخانه به بازه‌های کوچک‌تر برای ضرایب متغیر بیش‌تر درنظر گرفته شود، دقت مدل تحلیلی در مقایسه با حل عددی بالاتر می‌رود و نتایج با واقعیت یکی خواهد شد و برعکس، هرچه این تقسیم‌بندی کم‌تر باشد، نتایج حل تحلیلی در مقایسه با حل عددی دارای خطا خواهد بود. اما باید توجه داشت که هرچه تعداد بازه‌ها بیش‌تر شود، حجم ماتریس‌های ورودی از جمله ماتریس سرعت، ماتریس ضریب پراکندگی، ماتریس سطح مقطع عرضی و ... بیش‌تر و به‌دنبال آن محاسبه ماتریس انتشار دشوارتر و دستگاه معادلات بزرگ‌تر خواهد شد، که این موارد باعث افزایش هزینه محاسبات و صرف زمان بیش‌تر می‌شود. در مقایسه با پژوهش‌های صورت‌گرفته در زمینه حل تحلیلی معادله ADRE با ضرایب متغیر در رودخانه از جمله پژوهش Bavandpouri Gilan *et al.* (2017)، می‌توان اذعان داشت که، در پژوهش حاضر و پژوهش Bavandpouri Gilan *et al.* (2017)، چون حل تحلیلی روی یک معادله صورت گرفته پس نتایج یکی خواهد بود، اما پژوهش حاضر به سه دلیل نسبت به پژوهش Bavandpouri Gilan *et al.* (2017) مزیت خواهد داشت؛ ۱- در پژوهش ایشان مشکلات همگن‌کردن شرایط مرزی متغیر وجود دارد، این درحالی است که در پژوهش حاضر این مشکل وجود ندارد، ۲- در پژوهش مذکور که با استفاده از روش تبدیل انتگرال تعمیم‌یافته صورت گرفته است. پیچیدگی حل بیش‌تر بوده، در نتیجه هزینه محاسباتی آن بیش‌تر از پژوهش حاضر با استفاده از تبدیل لاپلاس است، ۳- دستگاه معادلاتی از نوع معادلات دیفرانسیل معمولی در پژوهش Bavandpouri Gilan *et al.* (2017) ایجاد

می‌شود که حل این دستگاه بسیار زمان‌بر بوده و در مقایسه با پژوهش حاضر، زمان بیش‌تری جهت شبیه‌سازی صرف خواهد شد. باتوجه به مثال‌های این پژوهش، هرچه تعداد بازه‌ها برای رودخانه موردنظر بیش‌تر شود حل تحلیلی موجود در این پژوهش دارای انطباق خوبی با حل عددی بوده که شاخص‌های آماری محاسبه‌شده از مقایسه این دو حل گواه این موضوع می‌باشد و در مواردی، حل تحلیلی موجود می‌تواند به‌دلیل دقت بالاتر، به‌عنوان معیاری جهت صحت‌سنجی حل‌های عددی درنظر گرفته شود.

پی‌نوشت‌ها

1. Advection
2. Dispersion
3. Fick
4. Advection-Dispersion-Reaction (ADRE)
5. Green Function Method
6. Generalized Integral Transform Technique (GITT)
7. Laplace Transform Method
8. Fourier Transform Method
9. Inverse Fourier transform
10. Stretched Gaussian distribution
11. Conformable advection-dispersion equation
12. $H(x-a)=\begin{cases}0 & if\ \ x<a\\ 1 & if\ \ x>a\end{cases}$
13. $\delta(x)=\begin{cases}\infty, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}$
14. Ordinary differential equation (ODE)
15. Concentrated matrix exponential
16. Fully implicit
17. Finite difference
18. Central space
19. Round-off errors
20. Truncation errors

دسترسی به داده‌ها

دسترسی به اطلاعات اضافی این پژوهش، تنها از طریق ایمیل نویسنده مسئول امکان‌پذیر است

تعارض منافع

هیچ‌گونه تعارض منافع توسط نویسندگان وجود ندارد.

منابع

1. Adrian, D.D., Yu, F.X., & Barbe, D. (1994). Water quality modeling for a sinusoidally varying waste discharge concentration. *Water Research*, *28*(5), 1167-1174.
2. Balf, M.R., Noori, R., Berndtsson, R., Ghaemi, A., & Ghiasi, B. (2018). Evolutionary polynomial regression approach to predict longitudinal dispersion coefficient in rivers. Journal of Water Supply: *Research and Technology-Aqua*, 67(5), 447-457.
3. Bavandpouri Gilan, N., Mazaheri, M., & Fotouhi Firouzabadi, M. (2017). Analytical Solution of Contaminant Transport Equation in River by Arbitrary Variable Coefficients Using Generalized Integral Transform Technique. *Journal of Advanced Mathematical Modeling*, *7*(1), 89-116. (in Persian)
4. Bharati, V. K., Singh, V. P., Sanskrityayn, A., & Kumar, N. (2019). Analytical solution for solute transport from a pulse point source along a medium having concave/convex spatial dispersivity within fractal and Euclidean framework. *Journal of Earth System Science*, *128*(8), 1-19.
5. Carr, E.J. (2020). New semi-analytical solutions for advection–dispersion equations in multilayer porous media. *Transport in Porous Media*, *135*(1), 39-58.
6. Chapra, S. C. (2008). *Surface water-quality modeling*. Waveland press.
7. Chen, J.-S., Liu, C.-W., Liang, C.-P., & Lai, K.-H. (2012). Generalized analytical solutions to sequentially coupled multi-species advective-dispersive transport equations in a finite domain subject to an arbitrary time-dependent source boundary condition. *Journal of hydrology*, *456*, 101-109.
8. Cotta, R. M., Knupp, D. C., & Naveira-Cotta, C. P. (2016). *Analytical heat and fluid flow in microchannels and microsystems*. New York, NY: Springer.
9. Dresnack, R., & Dobbins, W.E. (1968). Numerical analysis of BOD and DO profiles. *Journal of the Sanitary Engineering Division*, *94*(5), 789-807.
10. Genuchten, M.T., Leij, F.J., Skaggs, T.H., Toride, N., Bradford, S.A., & Pontedeiro, E.M. (2013). Exact analytical solutions for contaminant transport in rivers 1. The equilibrium advection-dispersion equation. *Journal of Hydrology and Hydromechanics*, *61*(2), 146.

11. Guerrero, J.P., Pimentel, L.C.G., Skaggs, T., & Van Genuchten, M.T. (2009). Analytical solution of the advection–diffusion transport equation using a change-of-variable and integral transform technique. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, *52*(13-14), 3297-3304.
12. Gulliver, J.S. (2007). *Introduction to chemical transport in the environment*. Cambridge University Press.
13. Heaton, L.L., López, E., Maini, P.K., Fricker, M.D., & Jones, N.S. (2012). Advection, diffusion, and delivery over a network. *Physical Review E*, *86*(2), 021905.
14. Hemond, H. F., & Fechner, E. J. (2014). *Chemical fate and transport in the environment*. Academic Press: Elsevier.
15. Horváth, G., Horváth, I., Almousa, S. A.-D., & Telek, M. (2020). Numerical inverse Laplace transformation using concentrated matrix exponential distributions. *Performance Evaluation*, *137*, 102067.
16. Korn, G.A., & Korn, T.M. (2000). *Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review*. Courier Corporation.
17. Kreyszig, E. (2008). *Advanced Engineering Mathematics. JohnWileyand sons*.
18. Kumar, A., Jaiswal, D. K., & Kumar, N. (2009). Analytical solutions of one-dimensional advection-diffusion equation with variable coefficients in a finite domain. *Journal of Earth System Science*, *118*(5), 539-549.
19. Kumar, A., Jaiswal, D. K., & Kumar, N. (2010). Analytical solutions to one-dimensional advection–diffusion equation with variable coefficients in semi-infinite media. *Journal of hydrology*, *380*(3-4), 330-337.
20. Kumar, P., & Sudheendra, S. (2018). Mathematical solution of transport of pollutant in unsaturated porous media with retardation factor. *International Journal of Applied Engineering Research*, *13*(1), 100-104.
21. Mashhadgarme, N., Mazaheri, M., & Mohammad, V.S.J. (2017). Analytical solutions to one-and two-dimensional Advection-Dispersion-Reaction equation with arbitrary source term time pattern using Green's function method. *Sharif Journal of Civil Engineering*, 33(2), 77-91. (in Persian)
22. Mazaheri, M., MV Samani, J., & MV Samani, H. (2013). Analytical solution to one-dimensional advection-diffusion equation with several point sources through arbitrary time-dependent emission rate patterns. *Journal of Agricultural Science and Technology*, *15*(6), 1231-1245.
23. Murli, A., & Rizzardi, M. (1990). Algorithm 682: Talbot's method of the Laplace inversion problems. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, *16*(2), 158-168.
24. Najafzadeh, M., Noori, R., Afroozi, D., Ghiasi, B., Hosseini-Moghari, S.-M., Mirchi, A., Haghighi, A.T., & Kløve, B. (2021). A comprehensive uncertainty analysis of model-estimated longitudinal and lateral dispersion coefficients in open channels. *Journal of hydrology*, 603, 126850.
25. Noori, R., Ghiasi, B., Sheikhian, H., & Adamowski, J. F. (2017). Estimation of the dispersion coefficient in natural rivers using a granular computing model. *Journal of Hydraulic Engineering*, 143(5), 04017001.
26. Noori, R., Mirchi, A., Hooshyaripor, F., Bhattarai, R., Haghighi, A. T., & Kløve, B. (2021). Reliability of functional forms for calculation of longitudinal dispersion coefficient in rivers. *Science of The Total Environment*, 791, 148394.
27. Park, E., & Zhan, H. (2001). Analytical solutions of contaminant transport from finite one-, two-, and three-dimensional sources in a finite-thickness aquifer. *Journal of Contaminant Hydrology*, *53*(1-2), 41-61.
28. Sanskrityayn, A., Singh, V. P., Bharati, V. K., & Kumar, N. (2018). Analytical solution of two-dimensional advection–dispersion equation with spatio-temporal coefficients for point sources in an infinite medium using Green’s function method. *Environmental Fluid Mechanics*, *18*(3), 739-757.
29. Sanskrityayn, A., Suk, H., Chen, J.-S., & Park, E. (2021). Generalized Analytical Solutions of The Advection-Dispersion Equation with Variable Flow and Transport Coefficients. *Sustainability*, *13*(14), 7796.
30. Sanskrityayn, A., Suk, H., & Kumar, N. (2017). Analytical solutions for solute transport in groundwater and riverine flow using Green’s Function Method and pertinent coordinate transformation method. *Journal of hydrology*, *547*, 517-533.
31. Shukla, V. (2002). Analytical solutions for unsteady transport dispersion of nonconservative pollutant with time-dependent periodic waste discharge concentration. *Journal of Hydraulic Engineering*, *128*(9), 866-869.

32. Simpson, M. J., & Ellery, A. J. (2014). Exact series solutions of reactive transport models with general initial conditions. *Journal of hydrology*, *513*, 7-12.
33. Smits, A.J.M., Nienhuis, P.H., & Leuven, R.S.E.W. (2000). New approaches to river management. *Environmental Management and Health*, 11(5), 474-475.
34. Stehfest, H. (1970). Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms [D5]. *Communications of the ACM*, *13*(1), 47-49.
35. Villinger, H. (1985). Solving cylindrical geothermal problems using the Gaver-Stehfest inverse Laplace transform. *Geophysics*, *50*(10), 1581-1587.
36. Wang, H., & Wu, H. (2009). Analytical solutions of three-dimensional contaminant transport in uniform flow field in porous media: A library. *Frontiers of Environmental Science & Engineering in China*, *3*(1), 112-128.
37. Williams, G.P., & Tomasko, D. (2008). Analytical solution to the advective-dispersive equation with a decaying source and contaminant. *Journal of Hydrologic Engineering*, *13*(12), 1193-1196.
38. Yang, S., Zhou, H., Zhang, S., & Wang, L. (2019). Analytical solutions of advective–dispersive transport in porous media involving conformable derivative. *Applied Mathematics Letters*, *92*, 85-92.
39. Yu, F., Adrian, D., & Singh, V. (1991). Modeling river quality by the superposition method. *Journal of Environmental Systems*, *20*(4), 1-16.