



## مدیریت آب و آبیاری (نشریه علمی)

دوره ۱۰ ■ شماره ۳ ■ زمستان ۱۳۹۹

صفحه‌های ۴۲۷-۴۱۱

DOI: 10.22059/jwim.2021.311788.832

مقاله پژوهشی:

### حل معکوس معادله انتقال آلاینده به منظور شناسایی منابع آلاینده در رودخانه‌ها تحت شرایط واقعی با استفاده از روش ژئواستاتستیک

مریم براتی مقدم<sup>۱</sup>، مهدی مظاهری<sup>۲\*</sup>، جمال محمد ولی سامانی<sup>۳</sup>

۱. دانشجوی دکتری، گروه سازه‌های آبی، دانشکده کشاورزی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران.

۲. استادیار، گروه سازه‌های آبی، دانشکده کشاورزی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران.

۳. استاد، گروه سازه‌های آبی، دانشکده کشاورزی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران.

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۰۸/۱۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۱۰/۰۷

#### چکیده

حل مسأله معکوس انتقال آلاینده به دلیل ویژگی‌های خاصی هم‌چون عدم وجود پاسخ، عدم یکتایی پاسخ و عدم پایداری بسیار مشکل و چالش‌برانگیز است. با توجه به پیچیدگی‌های مسأله مذکور، معمولاً فرضیات و ساده‌سازی‌هایی در روند حل صورت می‌گیرد که در نهایت منجر به ارائه روش‌هایی می‌گردد که قابلیت بسط و توسعه برای کاربرد در شرایط واقعی را ندارند. در این پژوهش، روشی کاربردی برای تشخیص منابع آلاینده در رودخانه‌ها تحت شرایط واقعی، با لحاظ نامنظم بودن مقاطع و غیرماندگاری جریان و با در نظر گرفتن تأثیر توأمان فرایندهای فیزیکی و شیمیایی انتقال، توسعه داده شده است. چارچوب احتمالاتی روش ارائه شده، امکان تخمین مشخصات منبع در لحظه‌های زمانی بیش‌تر از تعداد داده‌های مشاهداتی و هم‌چنین در نظر گرفتن عدم قطعیت موجود در نتایج مدل ناشی از خطا در داده‌های مشاهداتی را فراهم می‌آورد. با توجه به این‌که در حل معکوس معادله انتقال، حل مستقیم آن نیز مورد نیاز است، در ابتدا حل معادلات جریان و جابه‌جایی - پراکندگی با استفاده از روش عددی تفاضل محدود صورت گرفته و سپس معادله معکوس انتقال به منظور شناسایی منابع آلاینده موجود، با استفاده از روش ژئواستاتستیک حل می‌شود. نتایج اجرای مدل برای سه مثال فرضی و دو سری داده واقعی، حاکی از دقت مطلوب و پایداری عددی بالای مدل در بازایی مشخصات منابع آلاینده حتی شرایط پیچیده و نزدیک به واقعیت و با استفاده داده‌های مشاهداتی ناقص و دارای خطا بود. میزان عدم قطعیت در بازایی مشخصات منابع آلاینده هم از طریق محاسبه بازه اطمینان ۹۵ درصد در نظر گرفته شد.

**کلیدواژه‌ها:** بازایی مشخصات منبع آلاینده، جریان غیرماندگار، مسأله معکوس، معادله‌ی جابه‌جایی - پراکندگی.

### Inverse solution of Transport Equation for Pollution Source Identification in Rivers under Realistic Conditions Using the Geostatistical Method

Maryam Barati Moghaddam<sup>1</sup>, Mehdi Mazaheri<sup>2\*</sup>, Jamal MohammadVali Samani<sup>3</sup>

1. PhD Candidate of Water Structures, Faculty of Agriculture, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.

2. Assistant Prof., Department of Water Structures, Faculty of Agriculture, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.

3. Professor, Department of Water Structures, Faculty of Agriculture, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.

Received: November 01, 2020

Accepted: December 27, 2020

#### Abstract

The inverse transport problem is very difficult and challenging to solve due to some special characteristics, including the lack of solution, non-uniqueness and instability. Regarding to these complexities, usually some simplifications are made in solution process, which ultimately leads to identification methods that cannot be extended for real-world applications. This study aims to develop a practical method for pollution source identification in rivers under realistic conditions, which considers irregular cross-sections, unsteady flow and both physical and chemical transport processes. The stochastic framework of proposed method provides the possibility of estimation of source characteristics in greater time instances than available observation data as well as consideration of uncertainty due to error in those data. Considering that direct solution is also required in the solution of inverse transport problem, at first flow and transport equations is solved by finite difference numerical scheme. Then, inverse transport equation is solved to identify active pollution sources using the geostatistical method. Results of application of the method to three hypothetical examples and two sets of real data indicated the great accuracy and numerical stability of proposed method in reconstruction of source characteristics even in complicated real-world condition and using sparse and erroneous observation data. Furthermore, the identification uncertainty was considered through 95 percent confidence interval.

**Keywords:** Advection-dispersion equation, Inverse problem, Reconstruction of pollution source characteristics, Unsteady flow.

## مقدمه

آب‌های سطحی به‌ویژه رودخانه‌ها به دلیل در دسترس بودن و استفاده وسیع در صنعت، کشاورزی و مصارف شهری در معرض انواع آلودگی‌ها اعم از شیمیایی و بیولوژیکی قرار دارند. یکی از مهم‌ترین اقدامات برای کنترل و رصد دقیق وضعیت کیفی آب رودخانه‌ها، احداث ایستگاه‌های پایش در نقاط مختلف در طول رودخانه و اندازه‌گیری غلظت ماده آلاینده در زمان‌های مختلف است (Fakouri, Dekahi, 2016; Mehri et al., 2020). به‌محض ثبت و مشاهده مقادیر زیاد غلظت یک ماده آلاینده در ایستگاه‌های پایش موجود در طول رودخانه، شناسایی سریع موقعیت مکانی، زمان رهاسازی منبع آلاینده و بازیابی تابع شدت آن، به‌منظور بهره‌برداری صحیح از منابع آب و اتخاذ تصمیم‌های صحیح و به‌موقع مدیریتی در جهت پالایش محیط رودخانه امری حیاتی است. از طرف دیگر، تشخیص منبع یا منابع آلاینده متخلف و میزان تخطی آن‌ها از استاندارد برای موارد بی‌شماری از جمله تعیین جرایم زیست‌محیطی ضروری است، چرا که صنایع تولیدکننده واقع در حاشیه رودخانه‌ها موظف‌اند پساب‌های خروجی خود را با استانداردهای معین و خاصی به رودخانه تخلیه نمایند و در صورت تخطی این صنایع از استانداردهای مذکور، مشمول پرداخت جریمه متناسب با میزان تخلف می‌شوند (Jamshidi and Niksokhan, 2015). این مسأله با افزایش تعداد منابع آلاینده در حاشیه رودخانه، ابعاد پیچیده‌تری به خود می‌گیرد، زیرا نیاز است تا تعداد، موقعیت مکانی و سهم هرکدام از آن‌ها در آلودگی ایجادشده در پایین‌دست به‌طور دقیق تعیین شود.

مسأله شناسایی منابع آلاینده در آب‌های سطحی تحت عنوان مسائل معکوس<sup>۱</sup> طبقه‌بندی می‌شود. در مسأله مستقیم پدیده انتقال آلاینده در رودخانه، هدف محاسبه

توزیع مکانی و زمانی غلظت آلاینده در رودخانه با توجه به معلوم‌بودن مکان و شدت منابع آلاینده است. درحالی‌که در مسأله معکوس انتقال هدف تعیین مشخصات منبع آلاینده نامعلوم با داشتن داده‌های اندازه‌گیری‌شده غلظت در چند نقطه محدود از رودخانه است. مهم‌ترین و اساسی‌ترین تفاوت میان مسأله معکوس و مسأله مستقیم متناظر انتقال آلاینده این است که مسأله مستقیم اغلب خوش‌خیم بوده، درحالی‌که مسأله معکوس بدخیم است. مسائل بدخیم دارای ویژگی‌های خاصی مانند عدم وجود پاسخ، عدم یکتایی پاسخ و عدم پایداری (ایجاد تغییرات بزرگ در جواب مسأله در اثر تغییرات کوچک در ورودی‌ها) می‌باشند که این امر برخورد با این‌گونه مسائل را مشکل و چالش‌برانگیز می‌سازد. در مورد حل معکوس معادله انتقال مشکل عدم وجود پاسخ مطرح نمی‌باشد، زیرا بدیهی است که غلظت ماده آلاینده مشاهده‌شده در پایین‌دست حتماً ناشی از وجود یک منبع در بالادست است. مشکل عدم یکتایی پاسخ نیز در صورتی مطرح است که میزان داده‌های اندازه‌گیری کم باشد یا آرایش نقاط شاهد مناسب نباشد. چالش‌برانگیزترین مورد عدم پایداری پاسخ می‌باشد، دلیل اصلی عدم پایداری حل این است که در حل مسأله معکوس، توابع مجهول باید به‌صورت غیرمستقیم و از طریق داده‌های مشاهداتی اندک (که معمولاً دارای خطا نیز می‌باشند)، تعیین شوند. علاوه بر این به دلیل تأثیر پدیده پراکندگی بر انتقال ماده آلاینده، با فاصله‌گرفتن از محل منبع، توزیع غلظت ماده آلاینده در محیط به تدریج یکنواخت شده و میزان اطلاعات قابل استنباط از داده‌های مشاهداتی کاهش می‌یابد. در نتیجه تغییرات جزئی در شرایط اولیه و ورودی‌های مسأله منجر به تغییرات زیادی در پاسخ مسأله می‌شود. راه‌کارهای ارائه شده به‌منظور حل مشکل بدخیمی مسأله در بخش مبانی تئوری و روش‌ها شرح داده شده‌اند.

تئوری بیزین ترکیب کردند، که این امر امکان تخمین خطای محاسبات را فراهم می‌آورد. Michalak and Kitanidis (2002) روش ارائه شده توسط Snodgrass and Kitanidis (1997) را برای بازیابی تابع شدت یک ابر آلاینده سه‌بعدی در یک سایت دفن زباله در کانادا به کار گرفتند. Butera and Tanda (2003) عملکرد روش ژئواستاتستیک در یک میدان جریان دوبعدی و برای چندین منبع آلاینده غیرنقطه‌ای مورد ارزیابی قرار دادند. Michalak and Kitanidis (2004b) به منظور کاهش زمان محاسبات و ایجاد امکان استفاده از روش ژئواستاتستیک در محیط‌های ناهمگن، آن را با روش جزء الحاقی ترکیب کردند. Sun (2007) با بسط روش ژئواستاتستیک روشی را برای شناسایی منبع آلاینده در یک آکیفر دوبعدی با هدایت هیدرولیکی متغیر ارائه داد. Butera et al. (2013) روشی ابتکاری را بر مبنای روش ژئواستاتستیک برای شناسایی منبع آلاینده منفرد در آکیفرهای محدود و دوبعدی ارائه کردند. در این روش ابتدا محدوده مشکوک به وجود منبع آلاینده با توجه به اطلاعات قبلی از سایت مورد مطالعه تعیین شده و سپس تابع شدت منبع آلاینده با استفاده از روش ژئواستاتستیک تخمین زده می‌شود. Gzyl et al. (2014) یک روش چند مرحله‌ای را برای شناسایی مکان و تابع شدت منبع آلاینده در آب‌های زیرزمینی توسعه داده و کاربرد آن را برای یک سری داده واقعی مربوط به نشت مواد آلاینده به سفره آب زیرزمینی در جنوب لهستان بررسی کردند. نتایج نشان داد که روش به‌خوبی قادر به شناسایی محدوده مکانی و نرخ نشت ماده آلاینده است.

نگاهی اجمالی به پژوهش‌های انجام‌شده در حوزه حل مسأله معکوس انتقال نشان می‌دهد که عمده پژوهش‌های انجام‌شده در زمینه شناسایی منابع آلاینده به آب‌های زیرزمینی اختصاص داده شده است و تنها درصد

در این پژوهش روش ژئواستاتستیک برای تعیین تابع شدت منابع آلاینده در رودخانه و تحت شرایط واقعی به‌کارگرفته شده است. فرضیه اصلی روش مذکور این است که تابع منبع نامعلوم، تابعی تصادفی با ساختار معلوم اما دارای پارامترهای ساختاری نامعلوم است. مقادیر بهینه این پارامترهای ساختاری با استفاده از روش ارائه‌شده توسط Kitanidis (1996) تعیین می‌شوند. پس از تعیین پارامترهای ساختاری، تابع شدت منبع آلاینده با مینیمم‌کردن یک تابع هدف که احتمال به‌دست‌آمدن داده‌های مشاهداتی غلظت موجود با توجه به پارامترهای ساختاری تعیین‌شده را محاسبه می‌کند، تعیین می‌شود. جزئیات بیش‌تر را می‌توان در Kitanidis (1995)، Kitanidis (1996) و Snodgrass and Kitanidis (1997) یافت. چارچوب احتمالاتی این روش امکان در نظر گرفتن عدم قطعیت موجود در مسأله معکوس انتقال آلاینده و در مواردی تعیین مقدار آن را فراهم می‌آورد.

روش ژئواستاتستیک یکی از روش‌های رایج در زمینه شناسایی منبع آلاینده است که به‌طور گسترده برای حل مسأله شناسایی منبع آلاینده در آب‌های زیرزمینی برای مثال‌های فرضی (Snodgrass and Kitanidis, 1997; Butera and Tanda, 2003; Butera et al., 2006; Michalak and Kitanidis, 2003; Michalak and Kitanidis, 2004b; Sun, 2007; Butera et al., 2013) در موارد محدودی برای داده‌های واقعی (Michalak and Kitanidis, 2002; Michalak and Kitanidis, 2004a; Gzyl et al., 2014) به کار گرفته شده است. Snodgrass and Kitanidis (1997) روش ژئواستاتستیک را برای تخمین تابع شدت یک ماده آلاینده واکنش‌ناپذیر در یک آکیفر یک‌بعدی و همگن به‌کار بردند. به جای استفاده از تکنیک‌های تکراری رایج برای تعیین بهترین تخمین از پارامترهای موردنظر آن‌ها روش ژئواستاتستیک را با

### مبانی تئوری و روش‌ها

در این پژوهش حل معکوس معادله انتقال با استفاده از روش ژئواستاتستیک صورت می‌گیرد. با توجه به این‌که در حل معکوس معادله انتقال، حل مستقیم آن نیز مورد نیاز است، ابتدا درباره معادلات حاکم بر مدل مستقیم و روش حل این معادلات توضیح مختصری ارائه می‌شود. پس از آن مباحث تئوری مرتبط با حل مسأله معکوس انتقال بیان می‌گردد.

### مدل مستقیم

کاربرد مدل مستقیم انتقال آلاینده در رودخانه، محاسبه توزیع مکانی و زمانی غلظت آلاینده با معلوم بودن مکان و تابع شدت منابع آلاینده می‌باشد. با اجرای مدل مستقیم منحنی‌های غلظت در برابر زمان در تمامی نقاط و از جمله نقاط شاهد به دست می‌آیند. برای انجام مدل‌سازی مستقیم انتقال آلاینده در رودخانه باید معادلات دیفرانسیل جریان (معادلات سنت-ونانت) و انتقال (معادله جابه‌جایی-پراکندگی (ADE)) حل شوند. حل این معادلات فقط در حالت‌های بسیار ساده به صورت تحلیلی وجود دارد و برای حالات پیچیده و نزدیک به واقعیت از روش‌های عددی استفاده می‌گردد. نکته مهم دیگر این است که معمولاً حل معادلات جریان قبل از حل معادله انتقال صورت می‌گیرد و زیرا خروجی‌های آن شامل عمق‌ها و سرعت‌ها در مکان‌ها و زمان‌های مختلف، به‌عنوان ورودی مدل انتقال محسوب می‌شوند. معادلات دیفرانسیل جریان و انتقال در حالت یک‌بعدی به صورت زیر می‌باشند:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q_r}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q_r}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q_r^2}{A} \right) + gA \frac{\partial z_s}{\partial x} + gAS_f = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial (AC)}{\partial t} + \frac{\partial (CQ_r)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( AD \frac{\partial C}{\partial x} \right) + AkC - \sum_{i=1}^m f_i(t) \delta(x-x_i) = 0 \quad (3)$$

در معادلات فوق  $A$  برابر با سطح مقطع جریان،  $Q_r$  دبی جریان،  $z_s$  رقوم سطح آب،  $g$  شتاب ثقل،  $S_f$  شیب

کمی از پژوهش‌ها در این حوزه مرتبط با شناسایی منبع درآب‌های سطحی و رودخانه‌ها است. در صورتی‌که به دلیل سرعت بیش‌تر جریان در رودخانه‌ها، تخلیه محیط از مواد آلاینده در زمان بسیار کوتاه‌تری نسبت به سفره‌های آب زیرزمینی صورت می‌گیرد و لذا ضروری است تا فرایند پایش و تشخیص منابع آلاینده در رودخانه‌ها باید با سرعت و دقت بیش‌تری انجام شود (Cheng and Jia, 2010; Huang *et al.*, 2015; Ghane *et al.*, 2016; Zhang and Xin, 2016).

از طرف دیگر، همین پژوهش‌های اندک موجود هم دارای محدودیت‌هایی هستند، از جمله این‌که، فقط یک منبع آلاینده و با الگوی زمانی شدت منبع آلاینده به صورت بسیار ساده (به صورت یک تابع پالسی شکل یا به صورت تخلیه ناگهانی) در نظر گرفته شده است. همچنین، اغلب روش‌های ارائه شده برای شناسایی منبع آلاینده در آب‌های سطحی قابلیت کاربرد در شرایط جریان غیرماندگار و هندسه پیچیده رودخانه را ندارند، پارامترهایی نظیر سرعت و ضریب پراکندگی را ثابت فرض کرده و از تأثیر واکنش‌های شیمیایی صرف نظر می‌کنند. در راستای رفع محدودیت‌های پژوهش‌های قبلی در زمینه شناسایی منابع آلاینده در رودخانه‌ها، در این پژوهش روشی کاربردی بر مبنای تئوری ژئواستاتستیک برای شناسایی منابع آلاینده در حالت وجود جریان غیرماندگار و مقطع نامنظم و با لحاظ تأثیر توأمان فرایندهای فیزیکی و شیمیایی بر انتقال ماده آلاینده توسعه داده شده است. علاوه بر آن، مدل ارائه شده در این تحقیق قابلیت بازیابی مشخصات چند منبع آلاینده با الگوی بارگذاری دلخواه در مقیاس‌های مختلف زمانی و مکانی را دارا می‌باشد. به منظور نشان دادن کارایی و دقت مدل، نتایج حاصل از اجرای آن برای سه مسأله فرضی با شرایط مختلف و دو سری داده واقعی ارائه گردیدند. نتایج در ادامه آورده شده‌اند.

یک نقطه مشخص در پایین دست ایجاد نمایند. عدم پایداری هم به معنای عدم وابستگی پیوسته خروجی‌های مسأله (توابع شدت منابع آلاینده) به ورودی‌های مسأله (منحنی‌های غلظت-زمان در نقاط شاهد) می‌باشد، به طوری که تغییرات جزئی در ورودی‌های مسأله منجر به تغییرات زیادی در خروجی‌های آن می‌گردد (Sun, 2013). در نظر گرفتن تعداد و آرایش مناسبی از نقاط شاهد می‌تواند در جهت رفع مشکل عدم یکتایی پاسخ، مؤثر باشد (El Badia et al., 2005; Sun et al., 2006). به طور کلی می‌توان گفت که در مسأله تشخیص منابع آلاینده نحوه جانمایی نقاط شاهد باید به گونه‌ای باشد که شرط‌های زیر را برآورده کند:

۱. اثر هر منبع آلاینده باید توسط حداقل یک نقطه شاهد حس شود.

۲. اگر یک نقطه شاهد اثر  $m$  منبع آلاینده را حس کرده است، آنگاه باید اثر  $m-1$  منبع از این  $m$  منبع توسط  $m-1$  نقطه اندازه‌گیری دیگر حس شود.

به عبارت دیگر، برای حصول یکتایی پاسخ لازم است که در پایین دست هر منبع آلاینده یک نقطه شاهد وجود داشته باشد. بدین ترتیب اطلاعات به دست آمده از داده‌های غلظت-زمان در نقاط شاهد مستقل از هم بوده و امکان حل مسأله معکوس و رسیدن به نتایج یکتا را فراهم می‌آورند. علاوه بر آن برای غلبه بر مشکل عدم یکتایی، فرض شده است که یک سری اطلاعات اولیه در مورد فرم عبارت منبع، در دسترس است. با توجه به این که در این پژوهش مسأله شناسایی چند منابع آلاینده نقطه‌ای با مکان ثابت و تابع شدت متغیر با زمان مدنظر است، عبارت منبع به فرم زیر بیان می‌گردد:

$$S(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^m f_i(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad (1)$$

در معادله فوق  $S(\mathbf{x}, t)$  عبارت منبع،  $m$  تعداد منابع آلاینده،  $f_i(t)$  تابع شدت منبع آلاینده  $i$  ام،  $\mathbf{x}_i$  مکان منبع آلاینده

اصطکاک  $C$  غلظت ماده آلاینده،  $D$  ضریب پراکندگی،  $k$  ضریب زوال مرتبه اول<sup>۳</sup>،  $m$  تعداد منابع آلاینده نقطه‌ای،  $f_i(t)$  تابع شدت متناظر با منبع آلاینده نقطه‌ای  $i$  ام،  $\mathbf{x}_i$  محل منبع آلاینده  $i$  ام،  $\delta(\cdot)$  هم تابع دلتای دیراک،  $t$  بعد زمان و  $\mathbf{x}$  بعد مکان هستند (Chapra, 2008; Wu, 2007).

با توجه به شرایط پیچیده در نظر گرفته شده در این پژوهش (جریان غیرماندگار و مقاطع نامنظم) معادلات (۱) تا (۳) با استفاده از روش‌های عددی حل می‌شوند. روش حل عددی معادلات جریان (معادلات ۱ و ۲) بر مبنای الگوی ضمنی پرایزمن<sup>۴</sup> استوار می‌باشد. روش پرایزمن از قدیمی‌ترین و در عین حال معروف‌ترین روش‌های حل معادلات سنت-ونانت می‌باشد (Wu, 2007). حل مستقیم معادله انتقال (معادله (۳)) با استفاده از روش حجم محدود و الگوی مرکزی در زمان و QUICK<sup>۵</sup> در مکان (CTQS) صورت گرفته است (Barati Moghaddam et al., 2017).

## مدل معکوس

بیان کلی مسأله معکوس در نظر گرفته شده در این پژوهش به این صورت است که در یک رودخانه چندین منبع آلاینده نقطه‌ای در مکان‌های معلوم قرار دارند و منحنی‌های غلظت برابر زمان در چندین نقطه شاهد واقع پایین دست هر منبع آلاینده، موجود می‌باشند. حال لازم است تا منابع آلاینده فعال و توابع شدت آن‌ها تعیین شوند، به نحوی که توابع شدت محاسبه شده برای منابع آلاینده به وجود آورنده منحنی‌های غلظت-زمان اندازه‌گیری شده در نقاط شاهد باشند. همان‌طور که در مقدمه ذکر شد، حل معکوس معادله انتقال آلاینده معمولاً مشکل‌تر از مدل‌سازی مستقیم آن است و این مسأله دارای ویژگی‌های خاصی از جمله عدم یکتایی و ناپایداری پاسخ می‌باشد. منظور از عدم یکتایی پاسخ‌ها این است که ترکیب‌های مختلفی از شدت‌های توابع منابع آلاینده در بالادست می‌توانند یک منحنی غلظت-زمان واحد را در

رهایسازی را به  $N$  لحظه زمانی تقسیم شود، آنگاه  $z$  یک ماتریس  $[M \times 1]$  و  $f$  هم یک ماتریس  $[N \times 1]$  خواهند بود.  $H$  یک ماتریس  $[M \times N]$  است که به عنوان ماتریس انتقال شناخته می شود و  $v$  هم یک بردار  $[M \times 1]$  و مربوط به خطا در داده های مشاهداتی است. بردار خطا  $v$  دارای توزیع گوسی با میانگین صفر و ماتریس کوواریانس  $R = \sigma_R^2 I$  است که در آن  $I$  ماتریس همانی  $[M \times M]$  است. با مقایسه معادله های (۷) و (۵) می توان نتیجه گرفت که درایه های ماتریس  $H$  به صورت زیر هستند:

$$H_{i,j} = \Delta\tau \begin{cases} K(t_i - \tau_j) & t_i > \tau_j \\ 0 & t_i < \tau_j \end{cases} \quad (۸)$$

که در آن  $t_i$  لحظه زمانی اندازه گیری غلظت ماده آلاینده،  $\tau_j$  زمان رهایسازی و  $\Delta\tau$  گام زمانی در نظر گرفته شده برای گسسته سازی تابع شدت منبع آلاینده است. در واقع عبارات  $H_{i,j}$  در ماتریس انتقال تأثیر رهایسازی در زمان  $\tau_j$  بر داده مشاهداتی غلظت  $z_i$  را که در زمان  $t_i$  اندازه گیری شده است، نشان می دهد. همان طور که از معادله (۸) مشخص است برای ساخت ماتریس  $H$  لازم است که توابع انتقال در لحظه های زمانی مختلف محاسبه شوند. توابع انتقال در واقع پاسخ سیستم به تابع بارگذاری با شدت واحد (تخلیه ناگهانی یک واحد جرم ماده آلاینده در لحظه زمانی مورد نظر) می باشند. بنابراین برای محاسبه آنها لازم است تا معادله ADE به ازای بارگذاری با شدت واحد در محل منبع و برای لحظه های زمانی مختلف حل شود. این کار را می توان با استفاده از روش های تحلیلی یا عددی انجام داد. اگرچه استفاده از حل های تحلیلی برای محاسبه تابع انتقال تنها در حالت های ساده و ایده آل (مقاطع منظم، جریان ماندگار، ضرایب ثابت و الگوی بارگذاری ساده) ممکن است و در موارد پیچیده (مقاطع نامنظم، جریان غیرماندگار، ضرایب متغیر و الگوی بارگذاری دلخواه) باید از روش های عددی برای این منظور استفاده نمود. با توجه به شرایط پیچیده در

$i$  ام است. همچنین فرض بر این است که دبی منابع آلاینده در قیاس با دبی رودخانه ناچیز بوده و آن را تحت تأثیر قرار نمی دهد. لازم به ذکر است که در روش ژئواستاتستیک برای حل مشکل عدم پایداری مسأله معکوس، تأثیر خطا در داده های مشاهداتی به صورت ضمنی در فرایند بازیابی مشخصات منبع آلاینده در نظر گرفته می شود. توضیحات بیشتر در این زمینه و فرمولاسیون روش در بخش بعد آورده شده است.

### روش ژئواستاتستیک

اساس روش ژئواستاتستیک بر مبنای برقراری یک رابطه صریح خطی بین تابع شدت منبع آلاینده و داده های مشاهداتی غلظت قرار دارد (Snodgrass and Kitanidis, 1997; Kitanidis, 1996). با توجه به خطی بودن معادله ADE و با به کارگیری اصل برهم نهی می توان نوشت (Skaggs and Kabala, 1994):

$$C(\mathbf{x}, t) = \int_0^t f(\tau) K(\mathbf{x}, t - \tau) d\tau \quad (۲)$$

که در آن  $C(\mathbf{x}, t)$  غلظت ناشی از منبع آلاینده  $f$  در مکان  $\mathbf{x}$  و زمان  $t$ ،  $f(\tau)$  تابع شدت منبع آلاینده که باید بازیابی شود و  $K(\mathbf{x}, t - \tau)$  تابع انتقال است که عبارت است از تابع چگالی احتمال این که یک ذره رها شده در زمان  $\tau$  در زمان  $t$  به نقطه  $\mathbf{x}$  برسد. فرم ماتریسی معادله (Error! Reference source not found.) به صورت زیر نوشته می شود:

$$z = h(f) + v \quad (۳)$$

با مقایسه معادله های (Error! Reference source not found.) و (Error! Reference source not found.) می توان نتیجه گرفت که تابع  $h(f)$  خطی است و بنابراین می توان نوشت:

$$z = Hf + v \quad (۴)$$

اگر  $M$  داده مشاهداتی موجود باشد و بازه زمانی

ضرایب  $\Lambda$  از حل دستگاه معادلات جبری زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{bmatrix} \Sigma & \mathbf{HX} \\ (\mathbf{HX})^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda^T \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{HQ} \\ \mathbf{X}^T \end{bmatrix} \quad (12)$$

که در آن  $\mathbf{M}$  یک بردار  $[1 \times N]$  از ضرایب لاگرانژ<sup>v</sup> است. ماتریس کواریانس تابع شدت منبع آلاینده هم از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{V} = -\mathbf{XM} + \mathbf{Q} - \mathbf{QH}^T \Lambda^T \quad (13)$$

با استفاده از معادله (Error! Reference source not found)

می‌توان بازه اطمینان ۹۵ درصد تابع شدت تخمین زده شده را هم تعیین کرد، به این صورت که برای هر لحظه زمانی  $t_i$  می‌توان بازه اطمینان را از رابطه  $\hat{f}_i \pm 2\sqrt{V_{ii}}$  محاسبه کرد که در آن  $V_{ii}$  واریانس خطای تخمین  $\hat{f}_i$  است.

### قید عدم منفی بودن

در نظر گرفتن رابطه خطی بین داده‌های مشاهداتی و تابع شدت منبع آلاینده (معادله ۷)، ممکن است در برخی موارد منجر به پاسخ‌های غیرفیزیکی (مقادیر منفی برای تابع شدت) شود، که با اعمال قید عدم منفی بودن می‌توان این نقیصه را رفع نمود. این قید را می‌توان با استفاده از فرمولاسیون زیر اعمال کرد (Snodgrass and Kitanidis, 1997):

$$\tilde{\mathbf{f}} = \alpha (\mathbf{f}^{1/\alpha} - 1) \quad (14)$$

که در آن  $\alpha$  یک پارامتر مثبت است، که مقدار آن به نحوی در نظر گرفته می‌شود که همواره  $-\alpha < \tilde{\mathbf{f}}$  باشد. در مرحله بعد، باید متغیر تبدیل شده را به جای متغیر اصلی در معادلات به کار گرفته شود، در نتیجه معادله کلی (Error! Reference source not found.) با معادله زیر جایگزین می‌شود:

$$\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{h}}(\tilde{\mathbf{f}}) + \mathbf{v} \quad (15)$$

که در آن:

$$\tilde{\mathbf{h}}(\tilde{\mathbf{f}}) = \mathbf{h} \left[ \left( \frac{\tilde{\mathbf{f}} + \alpha}{\alpha} \right)^a \right] \quad (16)$$

نظر گرفته شده در این پژوهش محاسبه توابع انتقال با استفاده از روش عددی حجم محدود صورت گرفته است.

دستگاه معادلات (۷) یک دستگاه معادلات بدخیم است که امکان حل آن از روش‌های معمول وجود ندارد. به منظور رفع بدخیمی مسأله فرض می‌شود که  $\mathbf{f}$  دارای توزیع نرمال با میانگین و کواریانس معلوم و به صورت زیر است:

$$E[\mathbf{f}] = \mathbf{X}\beta \quad (5)$$

$$E[(\mathbf{f} - \mathbf{X}\beta)(\mathbf{f} - \mathbf{X}\beta)^T] = \mathbf{Q}(\theta) \quad (6)$$

که در آن  $\mathbf{X}$  یک بردار واحد  $[N \times 1]$ ،  $\beta$  میانگین نامعلوم،  $\theta$  بردار مربوط به پارامترهای ساختاری نامعلوم تابع کواریانس و  $\mathbf{Q}$  ماتریس کواریانس بارگذاری  $f(\tau)$  است. در این تحقیق ماتریس کواریانس ( $\mathbf{Q}$ ) به صورت گوسی در نظر گرفته شده که فرمولاسیون آن به صورت زیر است:

$$\mathbf{Q}(\tau_i - \tau_j | \theta) = \sigma^2 \exp \left[ -\frac{(\tau_i - \tau_j)^2}{I_f^2} \right] \quad (7)$$

که  $\theta^T = [\sigma^2, I_f]$  پارامترهای ساختاری هستند.

بازایی مشخصات تابع شدت منبع آلاینده در روش ژئواستاتستیک طی دو مرحله انجام می‌گیرد. در مرحله اول که آنالیز ساختاری نام دارد، پارامترهای ساختاری تابع کواریانس  $\theta$  تعیین شده و در مرحله دوم تابع شدت منبع آلاینده ( $\mathbf{f}$ ) با استفاده از روش kriging تخمین زده می‌شوند. پارامترهای ساختاری، با مینیمم کردن تابع هدف زیر تعیین می‌شوند (Snodgrass and Kitanidis, 1997):

$$L(\theta) = -\ln[p(\mathbf{z}|\theta)] \propto \frac{1}{2} \ln(|\Sigma| \cdot |\mathbf{X}^T \mathbf{H}^T \Sigma^{-1} \mathbf{H} \mathbf{X}|) + \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \Xi \mathbf{z} \quad (8)$$

که در آن:

$$\Sigma = \mathbf{H} \mathbf{Q} \mathbf{H}^T + \mathbf{R} \quad (9)$$

$$\Xi = \Sigma^{-1} - \Sigma^{-1} \mathbf{H} \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{H}^T \Sigma^{-1} \mathbf{H} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{H}^T \Sigma^{-1} \quad (10)$$

در روابط فوق،  $\mathbf{R}$  ماتریس کواریانس خطا در داده‌های مشاهداتی (۷) است. به محض این که پارامترهای ساختاری ( $\theta$ ) محاسبه شدند، تابع شدت از طریق یک سیستم kriging (De Marsily, 1986) تخمین زده می‌شود، یعنی:

$$\hat{\mathbf{f}} = \Lambda \mathbf{z} \quad (11)$$

سایر مراحل حل دستگاه معادلات (۱۸) مشابه حل برای حالت یک منبع آلاینده است، که در بخش‌های قبل شرح داده شد. فلوجارت کلی روش ژئواستاتستیک در شکل (۱) نشان داده شده است.

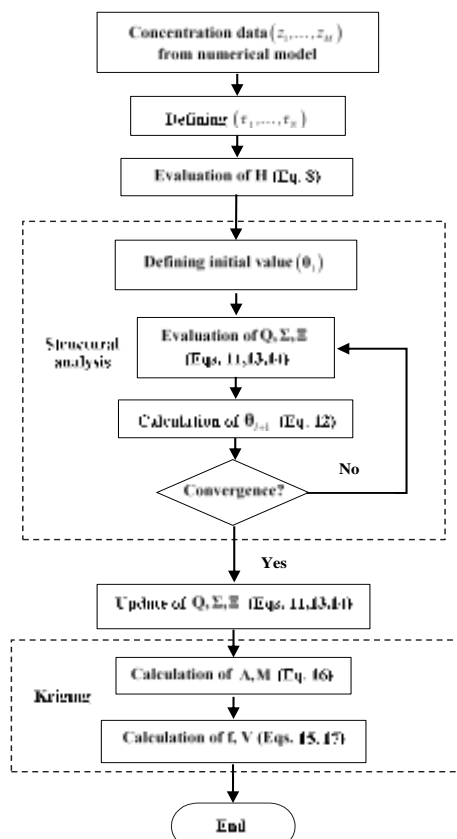


Figure 1. The algorithm of geostatistical method

### نتایج و بحث

در این قسمت کاربرد مدل ارائه شده در زمینه شناسایی منابع آلاینده در قالب سه مثال فرضی و دو سری داده واقعی نشان داده شده است. در مورد داده‌های واقعی مشاهده‌های مشاهده‌ای به صورت اندازه‌گیری شده موجود است، بنابراین نیازی به اجرای مدل مستقیم انتقال نیست، اما در مورد مثال‌های فرضی لازم است که داده‌های غلظت-زمان در نقاط شاهد با حل معادلات مدل مستقیم جریان و انتقال تعیین شوند.

از آنجایی که مدل دیگر خطی نیست، حل باید با استفاده از تکرارهای متوالی محاسبه شود. جزئیات بیشتر را می‌توان در Kitanidis (1995) یافت.

### بسط روش ژئواستاتستیک برای چند منبع آلاینده و چند نقطه شاهد

در این بخش نحوه بسط روش ژئواستاتستیک برای چند منبع آلاینده و چند نقطه شاهد شرح داده شده است. اگر فرض شود که  $m$  منبع آلاینده در نقاط  $x = [x_1, x_2, \dots, x_m]$  و  $p$  نقطه شاهد  $x_{obs} = [x_1, x_2, \dots, x_p]$  در دامنه حل موجود باشند، با توجه به خطی بودن معادله ADE می‌توان نوشت:

$$C(x_{obs}, t) = \sum_{j=1}^m f_j(\tau) K(x_{obs}, x_j, t - \tau) \quad (17)$$

که در آن  $i=1, 2, \dots, p$  تعداد نقاط شاهد می‌باشد. فرم

ماتریسی معادله (۱۷) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$z = Hf + v \quad (18)$$

که در آن:

$$z^T = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_p] \quad (19)$$

$$f^T = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_m] \quad (20)$$

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & \dots & H_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{i1} & \dots & H_{im} \end{bmatrix} \quad (21)$$

دستگاه معادلات (۱۸) یک دستگاه بلوکی می‌باشد که

در آن  $H_{ij}$ ،  $i=1, 2, \dots, p$  و  $j=1, 2, \dots, m$ ، برابر با ماتریس

انتقال مرتبط با اثر بارگذاری منبع آلاینده  $j$ ام بر داده‌های اندازه‌گیری شده غلظت در نقطه شاهد  $i$ ام می‌باشد.

باتوجه به مستقل بودن منابع آلاینده، ماتریس کواریانس هم

یک ماتریس بلوکی و به صورت زیر خواهد بود:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Q_m \end{bmatrix} \quad (22)$$



مختلف برای ضریب زوال در نظر گرفته شدند (جدول ۱). یک ماده آلاینده تجزیه‌پذیر در دوره زمانی سه ساعته وارد نهري با جریان یکنواخت و ماندگار می‌شود. سایر مشخصات مسأله در جدول (۱) آورده شده‌اند.

شکل (۲-ا) داده‌های مشاهداتی غلظت در برابر زمان در سه کیلومتری از بالادست را برای سه حالت مختلف در نظر گرفته‌شده نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که برای لحاظ کردن عدم قطعیت ناشی از خطا در داده‌های مشاهداتی حاصل از شبیه‌سازی مسأله را با استفاده از سه مقدار مختلف ضریب واکنش نشان می‌دهد. از شکل (۲-ب، ج) مشخص است که در حالت اول و دوم مدل مشخصات منبع آلاینده را با دقت تقریباً یکسانی بازیابی کرده است.

### مثال اول: بازیابی مشخصات یک منبع آلاینده با لحاظ واکنش شیمیایی زوال مرتبه اول

اکثر پژوهش‌های قبلی در زمینه شناسایی منبع آلاینده از تأثیر واکنش‌های شیمیایی در طی بازیابی مشخصات منابع آلاینده نامعلوم صرف‌نظر کرده‌اند. دلیل اصلی این امر آن است که در صورت وجود خطا در داده‌های مشاهداتی، در نظر گرفتن واکنش‌های شیمیایی باعث تشدید تأثیر خطا بر نتایج مدل معکوس شده و برای حفظ دقت نتایج در یک محدوده خاص و مورد قبول نیاز به تلاش محاسباتی مضاعف به‌ویژه در روش‌های تکراری می‌باشد. در این مثال مسأله شناسایی منبع آلاینده با لحاظ واکنش شیمیایی زوال مرتبه اول مورد بررسی قرار گرفته است. لازم به ذکر است که به منظور نشان دادن تأثیر نرخ واکنش بر نتایج مدل معکوس سه مقدار

Table 1. Simulation parameters related to example one

Parameter	L (km)	A (m <sup>2</sup> )	U (m/s)	D (m <sup>2</sup> /s)	T (hr)	$\Delta t$ (s)	$\Delta t_s$ (s)	k (s <sup>-1</sup> )		
								Case 1	Case 2	Case 3
	12	10	0.7	20	3	30	300	0	$5 \times 10^{-6}$	$5 \times 10^{-4}$

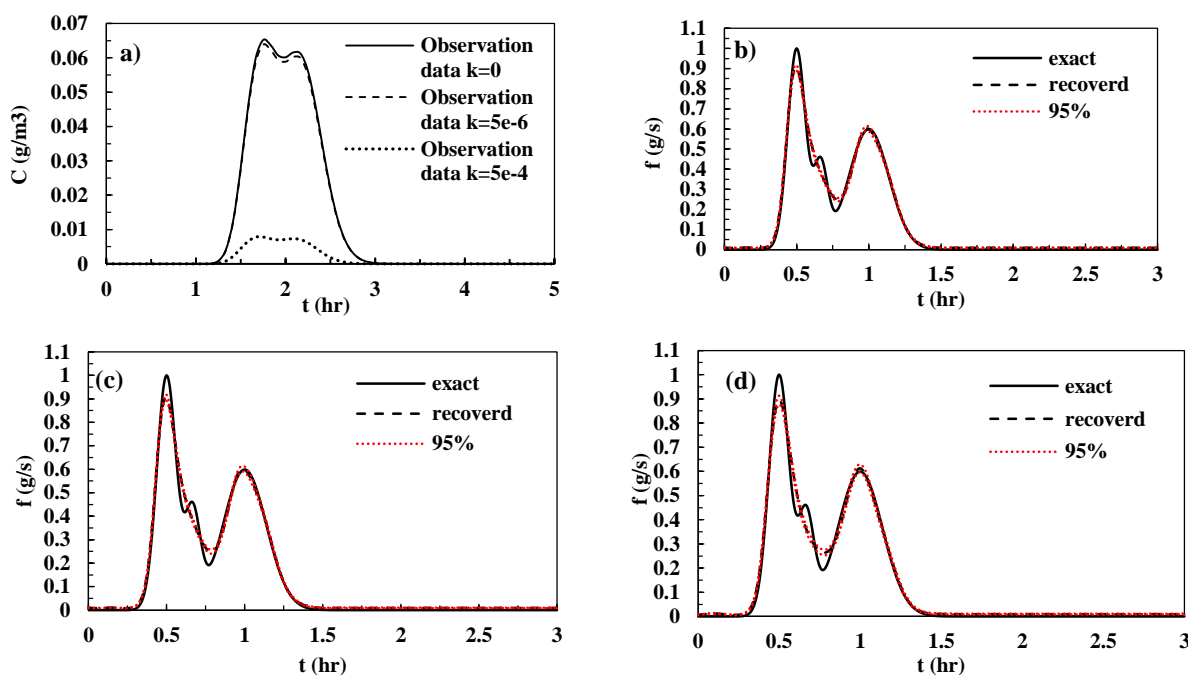


Figure 2. Example one. (a) observation at  $x=3$  km for three cases; (b) true and estimated release history with 95 percent confidence interval for case one; (c) true and estimated release history with 95 percent confidence interval for case two; (d) true and estimated release history with 95 percent confidence interval for case three

عملکرد روش ارائه شده تحت شرایط مذکور، مدل برای یک مثال فرضی با داده‌های مشاهداتی پراکنده و دارای خطای بالا ( $\sigma_R = 10^{-1} \text{ g/m}^3$ ) به کار برده شده است. سایر مشخصات مسأله موردنظر در جدول (۳) آورده شده‌اند. شکل (۳-a) داده‌های مشاهداتی مورد استفاده در بازیابی مشخصات منبع آلاینده را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشخص است تعداد داده‌های مشاهداتی به طرز قابل توجهی کم‌تر از داده‌های مشاهداتی استفاده شده در مثال اول (شکل ۲-a) هستند. شکل (۳-b) نتایج حاصل از اجرای مدل معکوس را نشان می‌دهد. این نتایج حاکی از وجود میزان بالاتری از میزان عدم قطعیت در بازیابی مشخصات منبع آلاینده نسبت به حالت داده‌های مشاهداتی کامل (حالت دوم مثال ۱) می‌باشد. اندازه بازه اطمینان (de) افزایش پیدا کرده (جدول ۴) و تابع شدت تخمین زده شده هموارتر و یکنواخت‌تر شده است. دلیل این امر این است که پیک‌های بالای نمودار با این سطح از خطا و پراکندگی در داده‌های مشاهداتی قابل بازیابی نیستند. با این حال مدل موفق شده شکل نسبی تابع شدت را بازیابی کند که برای کاربرد در موارد اورژانسی که معمولاً داده‌های مشاهداتی ناقص و دارای خطا در دسترس هستند، راضی‌کننده است.

شکل (۲-d) نشان می‌دهد که با افزایش چشم‌گیر میزان ضریب زوال (در حدود ۱۰۰ برابر بیش‌تر از حالت دوم) میزان پیک نمودار بازیابی شده قدری کم‌تر از نمودار واقعی بارگذاری است، اما با این حال باز هم دقت در محدوده قابل‌قبولی قرار دارد و مدل موفق به بازیابی صحیح فرم کلی تابع بارگذاری شده است. شاخص‌های خطای جدول (۲) هم مؤید این مطلب هستند. همان‌طور که از جدول (۲) مشخص است با افزایش میزان ضریب زوال میزان مجذور ضریب همبستگی کم‌تر و فاصله اقلیدسی هم بیش‌تر می‌شود که به معنای فاصله گرفتن تابع شدت بازیابی شده از تابع واقعی است.

Table 2. Error indexes of example one

Index	Case 1 k=0	Case 2 k=5×10 <sup>-6</sup>	Case 3 k=5×10 <sup>-4</sup>
R <sup>2</sup>	0.9919	0.99186	0.9885
RMSE (g/s)	0.0235	0.0236	0.0273
MAE (g/s)	0.01519	0.01521	0.0169
de (g/s)	0.2160	0.2163	0.2988

### مثال دوم: بازیابی مشخصات منبع آلاینده با استفاده از داده‌های مشاهداتی پراکنده

در کاربردهای عملی معمولاً داده‌های مشاهداتی به صورت ناقص و پراکنده موجود هستند و هم‌چنین ممکن است دارای میزان خطای بالایی باشند. به منظور نشان دادن

Table 3. Simulation parameters related to example two

Parameter	L (km)	A (m <sup>2</sup> )	U (m/s)	D (m <sup>2</sup> /s)	T (hr)	Δt (s)	Δt <sub>s</sub> (s)	k (s <sup>-1</sup> )
	12	10	0.7	20	3	30	random	5×10 <sup>-6</sup>

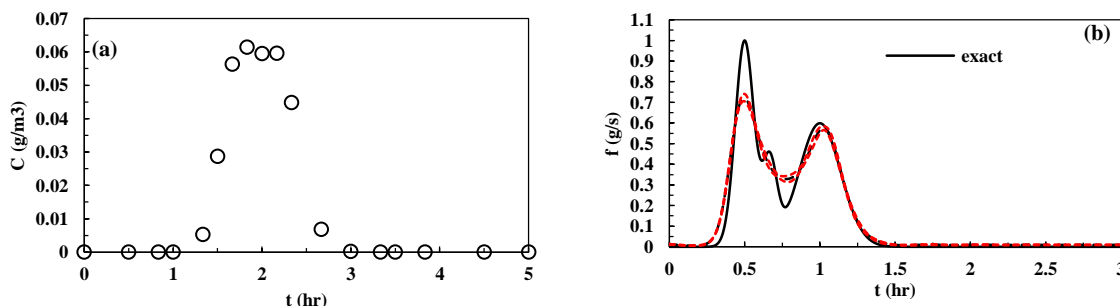


Figure 3. Example two. (a) observation data at  $x=3$  km; (b) true and estimate release history with 95 percent confidence interval

حل معکوس معادله انتقال آلاینده به منظور شناسایی منابع آلاینده در رودخانه‌ها تحت شرایط واقعی با استفاده از روش ژئواستاتستیک

می‌دهند. همان‌طور که از شکل‌های مذکور مشخص است، مدل ارائه شده قادر به بازیابی صحیح و دقیق مشخصات هر دو منبع آلاینده حتی در شرایط پیچیده جریان غیرماندگار و نامنظمی مقاطع است. شاخص‌های خطای جدول (۶) هم نشان‌دهنده خطا و عدم قطعیت بسیار کم در بازیابی مشخصات منابع آلاینده هستند. به‌طور خاص کم‌بودن فاصله بین حدود بالا و پایین بازه اطمینان (شاخص de) نشان‌دهنده این است که پاسخ‌های به‌دست‌آمده کاملاً یکتا می‌باشند.

Table 5. Simulation parameters related to example three

Parameter	Bed resistance ( $s/m^{1/3}$ )	D ( $m^2/s$ )	T (hr)	$\Delta t$ (s)	$\Delta t_s$ (s)	k ( $s^{-1}$ )
	0.025	50	24	60	600	$9 \times 10^{-6}$

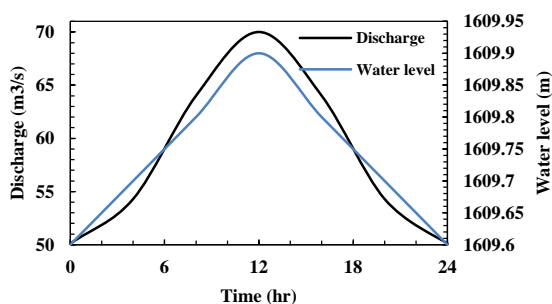


Figure 4. Boundary conditions of flow model

Table 6. Error indexes of example three

Index	$S_1$	$S_2$
$R^2$	0.9998	0.9997
RMSE (kg/s)	0.0377	0.0964
MAE (kg/s)	0.0226	0.07
de (kg/s)	1.9	4.34

#### مثال چهارم: سری اول داده‌های واقعی، یواس کریک

به‌منظور بررسی کارایی و دقت مدل معکوس ارائه شده در این پژوهش در بازیابی مشخصات منبع آلاینده در یک نهر کوهستانی دارای تغییرات ناگهانی در سطح مقطع، شیب و عمق جریان، مدل برای این سری از داده‌های واقعی اجرا شد.

Table 4. Error indexes of example two

Index	$R^2$	RMSE (g/s)	MAE(g/s)	de (g/s)
	0.9553	0.0542	0.0283	0.279

#### مثال سوم: بازیابی مشخصات منابع آلاینده در شرایط جریان غیرماندگار و مقاطع نامنظم

هدف از طراحی این مثال فرضی این است که قابلیت و توانایی مدل در زمینه بازیابی مشخصات منابع آلاینده چندگانه در حالت وجود جریان غیرماندگار در رودخانه با مقاطع نامنظم (تغییرات سطح مقطع جریان با مکان و زمان) مورد آزمون قرار گیرد. برای این منظور، یک رودخانه فرضی به طول ۲۰ کیلومتر در نظر گرفته شد. شرط مرزی بالادست مدل جریان تغییرات دبی با زمان و شرط مرزی پایین‌دست مدل جریان تغییرات رقوم سطح آب با زمان برای یک دوره ۲۴ ساعته در نظر گرفته شدند (شکل ۴). پارامترهای مورد استفاده در محاسبات مربوط به این مثال در جدول (۵) آورده شده‌اند. با حل معادلات جریان متغیرهای مرتبط با جریان برای مثال فرضی به‌دست می‌آیند. این متغیرها به‌عنوان ورودی‌های مدل انتقال مورد استفاده قرار می‌گیرند. با حل مستقیم معادلات انتقال داده‌های غلظت در برابر زمان در نقاط شاهد تعیین می‌شوند. سپس این داده‌های مشاهداتی در بازیابی مشخصات توابع شدت مجهول با استفاده از مدل معکوس به‌کار گرفته می‌شوند. در این مثال دو منبع آلاینده در سه و شش کیلومتری و دو نقطه شاهد در چهار و هشت کیلومتری از بالادست در نظر گرفته شدند. داده‌های مشاهداتی در شکل (۵-a) نشان داده شدند. لازم به ذکر است که به‌منظور لحاظ عدم قطعیت ناشی از خطا در داده‌های مشاهداتی در این مثال  $\sigma_R = 10^{-6} \text{ g/m}^3$  در نظر گرفته شد. شکل‌های (۵-b, c) به ترتیب تابع شدت واقعی و تخمین‌زده شده منبع آلاینده اول و دوم را نشان

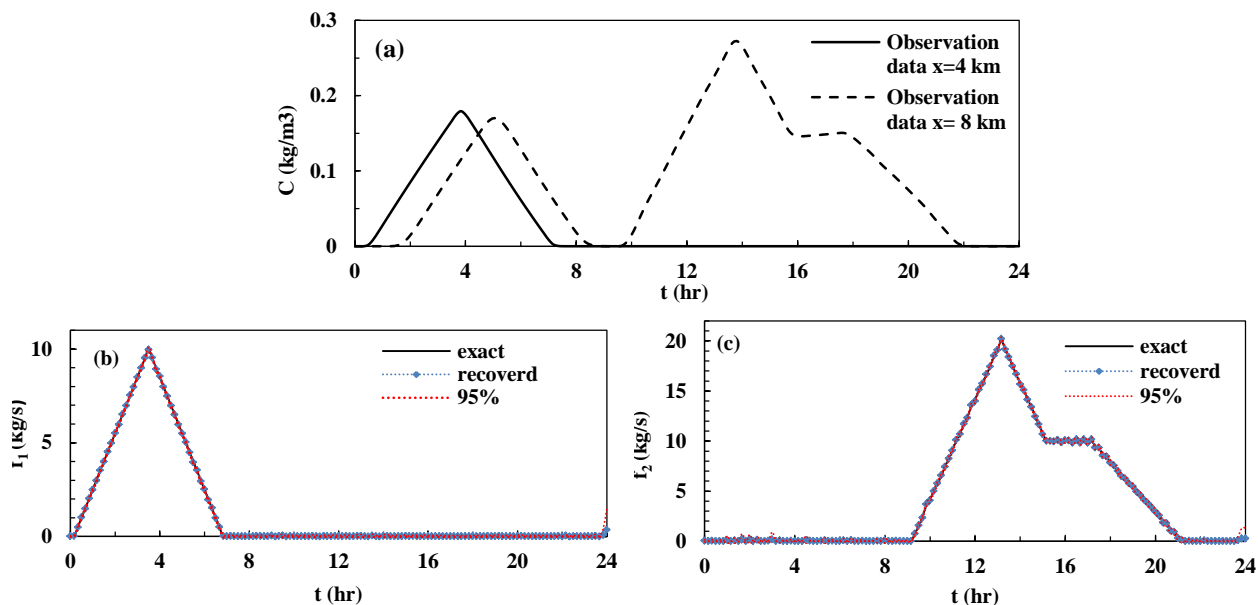


Figure 5. Example three. (a) observation data at  $x=4$  and  $8$  km; (b) true and estimate release history with 95 percent confidence interval of  $S_1$ ; (c) true and estimate release history with 95 percent confidence interval of  $S_2$

در داده‌های مشاهداتی در این مثال  $\sigma_R = 10^{-1} \text{ g/m}^3$  در نظر گرفته شد. نتایج حاصل از بازیابی مشخصات منبع آلاینده در قالب نمودارهای بارگذاری در برابر زمان و جدول شاخص‌های خطا در ادامه آورده شده‌اند.

Table 7. Simulation parameters of Uvas Creek experiment

Section (m)	Discharge ( $\text{m}^3/\text{s}$ )	A ( $\text{m}^2$ )	D ( $\text{m}^2/\text{s}$ )
0-38	0.0125	0.3	0.12
38-105	0.0125	0.42	0.15
105-281	0.0133	0.36	0.24
281-433	0.0136	0.41	0.31
433-619	0.014	0.52	0.4

شکل (۶-ا) داده‌های غلظت در برابر زمان اندازه‌گیری شده در دو ایستگاه ۳۸ و ۶۱۹ متری را نشان می‌دهد. همان‌طور که این شکل مشخص است با افزایش فاصله بین نقطه رهاسازی و مقطع شاهد ابر آلاینده بیش‌تر تحت تأثیر پراکندگی قرار گرفته و پیک آن به شدت پایین افتاده است. شکل (۶-ب، ج) به ترتیب تابع شدت اصلی و بازیابی شده براساس داده‌های مشاهداتی غلظت در برابر زمان در ایستگاه‌های ۳۸ و ۶۱۹ متری را نشان می‌دهند.

داده‌های مورد استفاده در این بخش از آزمایش تزریق ماده ردیاب در یواس کریک واقع در کالیفرنای آمریکا استخراج شده‌اند. طی این آزمایش تزریق ماده ردیاب (محلول غلیظ نمک طعام) در ساعت هشت صبح ۲۶ سپتامبر ۱۹۷۲ آغاز و برای سه ساعت ادامه یافت. در زمان انجام آزمایش دبی در نهر یواس کریک نزدیک به جریان پایه فصلی، در حدود  $12/5$  لیتر بر ثانیه به صورت ماندگار و غیریکنواخت و غلظت پس‌زمینه کلر برابر  $3/7$  میلی‌گرم بر لیتر ثبت گردیدند. پنج سایت نمونه‌برداری به ترتیب در فواصل ۳۸، ۱۰۵، ۲۸۱، ۴۳۳ و ۶۱۹ متری پایین دست محل تزریق در طول نهر مستقر شدند. جدول (۷) پارامترهای مورد استفاده در شبیه‌سازی آزمایش یواس کریک از جمله طول هر بازه، ضریب پراکندگی، دبی، مساحت مقطع عرضی برای هر بازه نشان می‌دهد. جزئیات انجام آزمایش اعم از نحوه نمونه‌برداری و آنالیز نتایج را می‌توان در (Avanzino *et al.*, 1984) یافت. لازم به ذکر است که به منظور لحاظ عدم قطعیت ناشی از خطا

عملکرد روش ارائه شده در مقیاس‌های مکانی و زمانی بزرگ‌تر مورد آزمون قرار گیرد. برای این منظور بازه ۶۲ کیلومتری از رودخانه کارون، حدفاصل ملاثانی تا اهواز در نظر گرفته شد. منبع آلاینده در ۱۱/۵ کیلومتری از بالادست در نظر گرفته شد و داده‌های غلظت در برابر زمان هم در فاصله ۲۰ کیلومتری از بالادست برداشت شدند. شرط مرزی بالادست مدل جریان تغییرات دبی با زمان و شرط مرزی پایین دست مدل جریان تغییرات رقوم سطح آب با زمان برای یک دوره ۶۰ روزه در نظر گرفته شدند (شکل ۷). سایر پارامترهای مورداستفاده در شبیه‌سازی این سری از داده‌های واقعی در جدول (۹) آورده شده‌اند. در این مثال ماده ردیاب تا رسیدن به نقطه شاهد مسافت قابل توجهی را طی می‌کند، به طوری که تقریباً ۵/۵ ساعت طول می‌کشد تا اثر ابر آلاینده به نقطه شاهد برسد.

همان‌طور که از شکل (۶) و شاخص‌های خطای جدول (۸) هم مشخص است، مدل ارائه شده در این پژوهش در هر دو حالت موفق به بازیابی صحیح و دقیق مشخصات کلی منبع آلاینده شده است. مقایسه شکل‌های (c) و (b) نشان می‌دهد که با افزایش فاصله نقطه شاهد از منبع، دقت روش در بازیابی مشخصات منبع قدری کاهش می‌یابد. این امر به دلیل گسترش توزیع مکانی غلظت در اثر پراکندگی می‌باشد که در نهایت باعث کاهش اطلاعات قابل حصول از منحنی غلظت-زمان اندازه‌گیری شده در نقطه شاهد واقع در فاصله دورتر از منبع آلاینده می‌شود.

### مثال پنجم: سری دوم داده‌های واقعی، رودخانه کارون

هدف از اجرای مدل برای این سری از داده‌های این است که

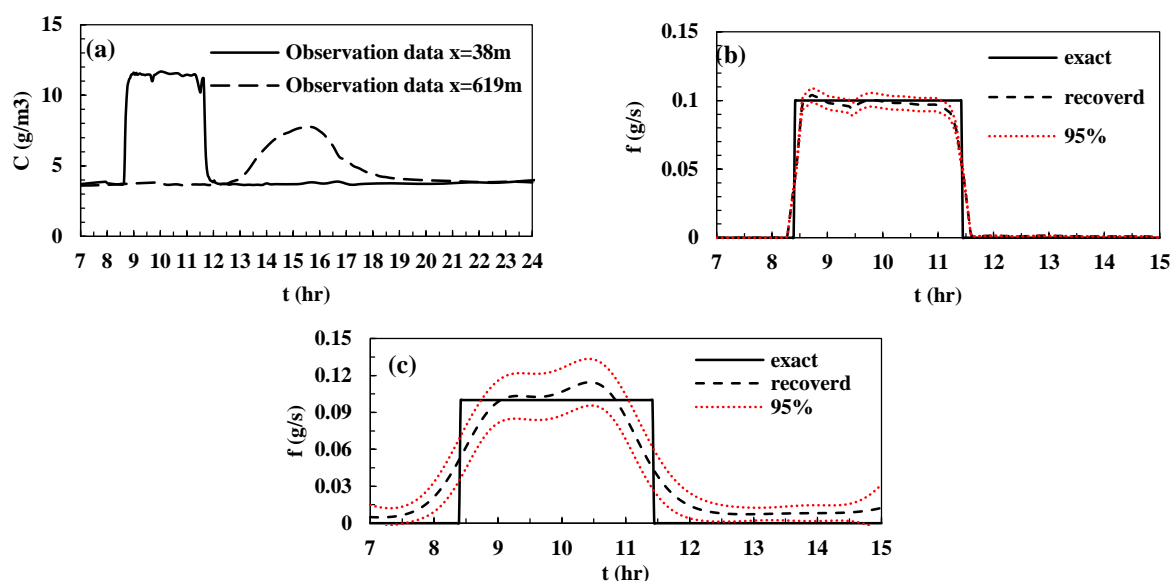


Figure 6. Uvas Creek (a) observation data at  $x=38$  and  $619$  m; (b) true and estimated release history, with 95 percent confidence interval based on observation data at  $x=38$ ; (c) true and estimated release history, with 95 percent confidence interval based on observation data at  $x=619$

Table 8. Error indexes for example 4 (Uvas Creek experiment)

Index	38 m	619 m
$R^2$	0.9698	0.8927
RMSE (g/s)	0.0087	0.0174
MAE (g/s)	0.0034	0.0131
de (g/s)	0.1002	0.4579

شاهد واقع در ۲۰ کیلومتری از بالادست را نشان می‌دهد. از شکل مشخص است که ابر آلاینده تحت تأثیر پراکندگی کاملاً باز شده و پیک آن پایین افتاده است. با توجه به شرایط رودخانه مذکور و احتمال وجود خطای قابل ملاحظه در داده‌های مشاهداتی  $\sigma_R = 10^{-3} \text{ g/m}^3$  در نظر گرفته شد. شکل (۸-ب) نشان می‌دهد که تابع شدت بازیابی شده تطابق خوبی با تابع شدت واقعی دارد. شاخص‌های خطای ارائه شده در جدول (۱۰) هم مؤید این مطلب هستند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که روش ارائه شده در این پژوهش به خوبی قادر به بازیابی مشخصات منبع آلاینده مجهول در رودخانه‌های واقعی با مقاطع نامنظم و تحت شرایط جریان غیرماندگار و هم‌چنین مقادیر بالای ضریب پراکندگی است.

طی این مدت زمان نسبتاً طولانی ماده آلاینده در معرض تأثیرات پدیده پراکندگی قرار می‌گیرد که میزان آن چندین هزار برابر پراکندگی برای یک نهر کوچک کوهستانی مثل یواس کریک (مثال چهارم) است. این امر میزان اطلاعات قابل استخراج از ابر آلاینده اندازه‌گیری شده در نقطه شاهد برای شناسایی منبع آلاینده را به شدت کاهش داده و بر پیچیدگی مسأله می‌افزاید. بنابراین مدل معکوس باید با مسأله سخت‌تر و چالش‌برانگیزتری مواجه شود که در صورت موفقیت در بازیابی مشخصات منبع مجهول، سنگ محک خوبی برای تأیید قابلیت مدل در کاربردهای عملی و مثال‌های نزدیک به واقعیت خواهد بود. شکل (۸-ا) داده‌های غلظت اندازه‌گیری شده در نقطه

Table 9. Simulation parameters of example five

Parameter	Bed resistance ( $\text{s/m}^{1/3}$ )	D ( $\text{m}^2/\text{s}$ )	T (day)	$\Delta t$ (hr)	$\Delta t_s$ (hr)	k ( $\text{s}^{-1}$ )
	0.035	264	60	1	24	0

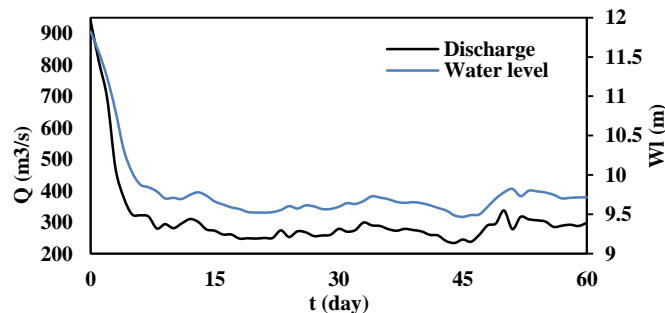


Figure 7. Boundary conditions of flow model

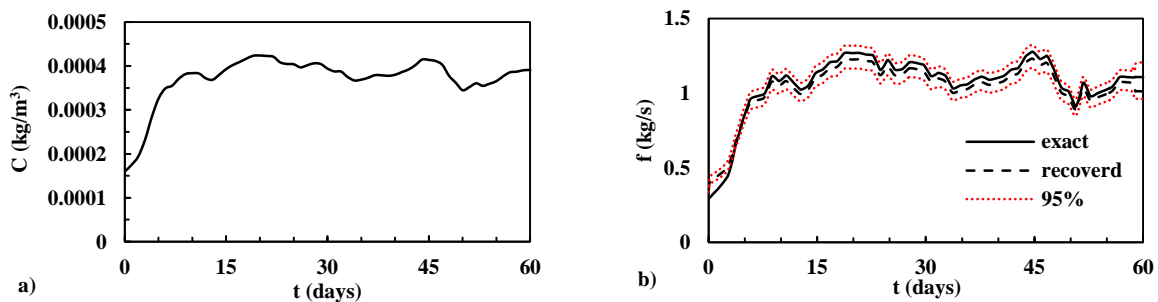


Figure 8. Karoon River (a) observation data at  $x=20$  km; (b) true and estimated release history, with 95 percent confidence interval

حل معکوس معادله انتقال آلاینده به منظور شناسایی منابع آلاینده در رودخانه‌ها تحت شرایط واقعی با استفاده از روش ژئواستاتستیک

**Table 10. Error indexes of example five**

Index	R <sup>2</sup>	RMSE (g/s)	MAE(g/s)	de (Kg/s)
	0.9996	0.00164	0.0379	4.989

### نتیجه‌گیری

بازیابی مکان و تابع شدت منابع آلاینده در رودخانه‌ها اقدامی ضروری در جهت برنامه‌ریزی برای کنترل صدمات ناشی از آلودگی و برنامه‌ریزی برای پاکسازی است. این مسأله جزو مسائل معکوس طبقه‌بندی می‌شود و به دلیل بدخیم بودن مسأله حل آن بسیار دشوار و چالش‌برانگیزتر از حل معادله مستقیم انتقال است. در این پژوهش برای حل مسأله معکوس انتقال به منظور شناسایی منابع آلاینده در رودخانه‌ها از روش ژئواستاتستیک استفاده شد، که قبلاً با موفقیت در زمینه شناسایی منبع آلاینده در آب‌های زیرزمینی به کار برده شده بود. از آنجایی که این روش یک توصیف احتمالاتی از منابع آلاینده نامعلوم را در نظر می‌گیرد، امکان تخمین مشخصات منبع در لحظه‌های زمانی بیش‌تر از تعداد داده‌های مشاهداتی را فراهم می‌آورد. در حالی که در برخی از روش‌های شناسایی منابع آلاینده مثل روش‌های شبیه‌سازی-بهینه‌سازی، تعداد لحظه‌های زمانی برای تخمین تابع شدت باید کم‌تر یا مساوی تعداد داده‌های مشاهداتی باشد. علاوه بر آن چارچوب احتمالاتی این روش امکان در نظر گرفتن عدم قطعیت موجود در نتایج مدل معکوس ناشی از خطا در داده‌های مشاهداتی را فراهم می‌آورد.

به منظور نشان دادن کارایی روش در شناسایی منابع آلاینده در رودخانه‌ها، روش ارائه‌شده برای مثال‌های فرضی متعدد با در نظر گرفتن حالات مختلف (ماده آلاینده واکنش‌دهنده و ماده آلاینده واکنش‌ناپذیر، منبع آلاینده منفرد و منابع آلاینده چندگانه و هم‌چنین رژیم‌های مختلف جریان) و دو سری داده واقعی (شامل یک رودخانه کوهستانی کوچک و یک رودخانه عریض و

طولانی) به کار گرفته شد. نتایج نشان داد که در حالت وجود یک منبع آلاینده منفرد و با مکان معلوم، تنها با داشتن داده‌های غلظت در برابر زمان در یک نقطه شاهد پایین‌دست، حتی در فواصل نسبتاً زیاد نسبت به منبع آلاینده و پراکندگی در داده‌های مشاهداتی می‌توان شدت آن را با دقت قابل‌قبولی بازیابی کرد. نتایج کاربرد مدل در بازیابی مشخصات منابع با در نظر گرفتن نرخ‌های مختلف واکنش‌های شیمیایی هم نشان داد که اگرچه نرخ‌های بالای واکنش میزان اطلاعات قابل استخراج از ابر ماده آلاینده اندازه‌گیری‌شده در نقطه شاهد را کاهش می‌دهد، با این حال مدل ارائه‌شده در این پژوهش قادر به بازیابی مشخصات منبع آلاینده با دقت خوب و قابل‌قبولی است. به‌طور خاص، کاربرد روش برای بازیابی تابع شدت منبع آلاینده در یک بازه زمانی ۶۰ روزه در یک رودخانه عریض و طولانی، نشان داد که روش قادر به بازیابی صحیح و دقیق مشخصات منبع آلاینده در مقیاس‌های مختلف زمانی و مکانی است. در مجموع با توجه به نتایج به‌دست‌آمده می‌توان گفت که روش ارائه‌شده در این پژوهش می‌تواند مشخصات منبع آلاینده را در گستره وسیعی از حالات مختلف از نهرهای کوهستانی کوچک گرفته تا رودخانه عریض و طولانی، با لحاظ رژیم‌های مختلف جریان و الگوهای مختلف بارگذاری، منابع آلاینده چندگانه و با در نظر گرفتن تأثیر توأمان فرایندهای فیزیکی و شیمیایی بر انتقال ماده آلاینده، با دقت قابل‌قبولی بازیابی کند. البته لازم به ذکر است که در این پژوهش به بازیابی تابع شدت منبع آلاینده با فرض معلوم بودن مکان آن پرداخته شده است و بحث شناسایی هم‌زمان مکان و تابع شدت در پژوهش‌های آتی مدنظر قرار گرفته است.

### لیست پارامترها

ماتریس کواریانس خطا [M×M]	R	مکان [L]	x
ماتریس همبستگی [M×M]	I	زمان [T]	t
واریانس خطا	$\sigma_R^2$	سطح مقطع جریان [L <sup>2</sup> ]	A
لحظه زمانی اندازه گیری غلظت [T]	$t_i$	دبی جریان [L <sup>3</sup> /T]	$Q_r$
زمان رهاسازی [T]	$\tau_j$	رقوم سطح آب [L]	$z_s$
گام زمانی [T]	$\Delta\tau$	شتاب ثقل [L/T <sup>2</sup> ]	g
یک بردار واحد [N×1]	X	غلظت ماده آلاینده در مکان x و زمان t [M/L <sup>3</sup> ]	C(x,t)
ماتریس کواریانس تابع شدت مجهول [N×M]	Q( $\theta$ )	ضریب زوال مرتبه اول [T <sup>-1</sup> ]	$k_{decay}$
میانگین نامعلوم تابع شدت	$\beta$	ضریب پراکندگی [L <sup>2</sup> /T]	D
بردار مربوط به پارامترهای ساختاری نامعلوم	$\theta$	تعداد منابع آلاینده	m
تابع چگالی احتمال	$p(z \theta)$	تابع شدت متناظر با منبع آلاینده i ام [T]	$f_i(t)$
ضرایب کریجینگ [N×M]	$\Lambda$	تابع دلتای دیراک	$\delta(\cdot)$
بردار مربوط به ضرایب لاگرانژ [1×N]	M	شیب اصطکاک	$S_f$
کواریانس خطای تخمین زده شده [N×N]	V	منبع آلاینده رها شده در مکان x و زمان t [M/T]	S(x,t)
ماتریس ساختگی [M×M] (Dummy matrix)	$\Sigma$	تابع انتقال در مکان x و زمان t [M/L <sup>3</sup> ]	K(x,t)
ماتریس ساختگی [M×M] (Dummy matrix)	$\Xi$	تعداد لحظه‌های زمانی بازیابی تابع شدت	N
پارامتر مثبت مربوط به قید عدم منفی بودن	$\alpha$	تعداد داده‌های مشاهداتی	M
بردار توابع شدت تغییر یافته	$\tilde{f}$	بردار توابع شدت مجهول [N×1]	f
گام زمانی موردنظر برای بازیابی تابع شدت [T]	$\Delta t$	بردار داده‌های مشاهداتی [M×1]	z
گام زمانی برداشت داده‌های مشاهداتی [T]	$\Delta t_s$	ماتریس انتقال [M×N]	H
مدت زمان کل شبیه‌سازی [T]	T	بردار خطا [M×1]	v

### منابع

1. Avanzino, R. J., Zellweger, G. W., Kennedy, V. C., Zand, S. M., & Bencala, K. E. (1984). *Results of a solute transport experiment at Uvas Creek, September 1972 (2331-1258)*. Retrieved from U. S. geological survey, website: <https://www.usgs.gov>
2. Barati Moghaddam, M., Mazaheri, M., & Samani, J. M. V (2017). A comprehensive one-dimensional numerical model for solute transport in rivers. *Hydrology & Earth System Sciences*, 21(1), 99-116.
3. Butera, I., & Tanda, M. G. (2003). A geostatistical approach to recover the release history of groundwater pollutants. *Water Resources Research*, 39(12), 1372-1380.

### تعارض منافع

هیچ‌گونه تعارض منافع توسط نویسندگان وجود ندارد.

### پی‌نوشت

1. Inverse problems
2. Advection-Dispersion Equation (ADE)
3. First-order decay
4. Preissmann
5. Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics (QUICK)
6. Identity matrix
7. Lagrange multipliers



4. Butera, I., Tanda, M., & Zanini, A. (2006). Use of numerical modelling to identify the transfer function and application to the geostatistical procedure in the solution of inverse problems in groundwater. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems Jiip*, 14(6), 547-572.
5. Butera, I., Tanda, M.G., & Zanini, A. (2013). Simultaneous identification of the pollutant release history and the source location in groundwater by means of a geostatistical approach. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 27(5), 1269-1280.
6. Chapra, S. C. (2008). *Surface water-quality modeling*. Illinois: Waveland press.
7. Cheng, W. P., & Jia, Y. (2010). Identification of contaminant point source in surface waters based on backward location probability density function method. *Advances in Water Resources*, 33(4), 397-410.
8. De Marsily, G. (1986). *Quantitative hydrogeology; groundwater hydrology for engineers*. San Diego, California: Academic Press.
9. El Badia, A., Ha-Duong, T., & Hamdi, A. (2005). Identification of a point source in a linear advection-dispersion-reaction equation: application to a pollution source problem. *Inverse Problems*, 21(3), 1121.
10. Fakouri Dekahi, B. (2016). Effect of floods and management of pollution sources on temporal and spatial variations in water salinity of Karun River (Mollasani to Farsiat). *Water and Irrigation Management*, 6(2), 295-314. (In Persian).
11. Ghane, A., Mazaheri, M., & Samani, J. M. V. (2016). Location and release time identification of pollution point source in river networks based on the Backward Probability Method. *Journal of Environmental Management*, 180, 164-171.
12. Gzyl, G., Zanini, A., Frączek, R., & Kura, K. (2014). Contaminant source and release history identification in groundwater: a multi-step approach. *Journal of Contaminant Hydrology*, 157, 59-72.
13. Huang, R., Han, L.-x., Jin, W.-l., Peng, H., Pan, M.-m., & Zhang, H. (2015). The Reverse Based Identification of Source Intensity Changes in Sudden Pollution Accidents in Medium River. *Nature Environment and Pollution Technology*, 14(3), 673.
14. Jamshidi, S., & Niksokhan, M. H. (2015). Waste load allocation in Sefidrud using water quality trading. *Water and Irrigation Management*, 5(2), 243-259. (In Persian).
15. Kitanidis, P.K. (1995). Quasi-linear geostatistical theory for inverting. *Water Resources Research*, 31(10), 2411-2419.
16. Kitanidis, P. K. (1996). On the geostatistical approach to the inverse problem. *Advances in Water Resources*, 19 (6), 333-342.
17. Mehri, Y., Mehri, M., & Soltani, J. (2020). Evaluation of combined Models with Optimization Approach of PSO and GA in ANFIS for Predicting of Dispersion Coefficient in Rivers. *Water and Irrigation Management*, 10 (1), 45-59. (In Persian).
18. Michalak, A. M., & Kitanidis, P. K. (2002). Application of Bayesian inference methods to inverse modelling for contaminants source identification at Gloucester Landfill, Canada. *Developments in Water Science*, 47, 1259-1266.
19. Michalak, A.M., & Kitanidis, P.K. (2003). A method for enforcing parameter nonnegativity in Bayesian inverse problems with an application to contaminant source identification. *Water Resources Research*, 39(2), 1033-1046.
20. Michalak, A.M., & Kitanidis, P.K. (2004a). Application of geostatistical inverse modeling to contaminant source identification at Dover AFB, Delaware. *Journal of hydraulic Research*, 42(S1), 9-18.
21. Michalak, A.M., & Kitanidis, P.K. (2004b). Estimation of historical groundwater contaminant distribution using the adjoint state method applied to geostatistical inverse modeling. *Water resources research*, 40(8), W08302.
22. Skaggs, T.H., & Kabala, Z. (1994). Recovering the release history of a groundwater contaminant. *Water Resources Research*, 30 (1), 71-79.
23. Snodgrass, M. F., & Kitanidis, P. K. (1997). A geostatistical approach to contaminant source identification. *Water Resources Research*, 33(4), 537-546.
24. Sun, A.Y. (2007). A robust geostatistical approach to contaminant source identification. *Water Resources Research*, 43(2), W02418.
25. Sun, A. Y., Painter, S. L., & Wittmeyer, G. W. (2006). A constrained robust least squares approach for contaminant release history identification. *Water Resources Research*, 42 (4), W04414.
26. Sun, N.-Z. (2013). *Inverse problems in groundwater modeling* (Vol. 6). Netherlands: Springer Science & Business Media.
27. Wu, W. (2007). *Computational river dynamics*. London: CRC Press.
28. Zhang, S.-P., & Xin, X.-k. (2016). Pollutant source identification model for water pollution incidents in small straight rivers based on genetic algorithm. *Applied Water Science*, 1-9.